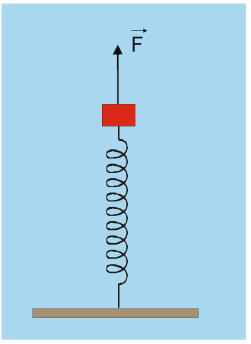
Μια ΑΑΤ για εξάσκηση



Σώμα μάζας m = 1kg ισορροπεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100N/m, το κάτω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο έδαφος. Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση κατακόρυφης προς τα πάνω δύναμης μέτρου F = 20N όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 καταργούμε τη δύναμη. Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω.

α. να προσδιορίσετε τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και να εξηγήσετε γιατί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος θα είναι A = 0,2m

β. να δείξετε ότι το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.

γ. να υπολογίσετε τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου

δ. να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο

ε. να υπολογίσετε τη στιγμή που το σώμα θα περάσει για 1η φορά από τη θέση $x_1 = -0,1m$

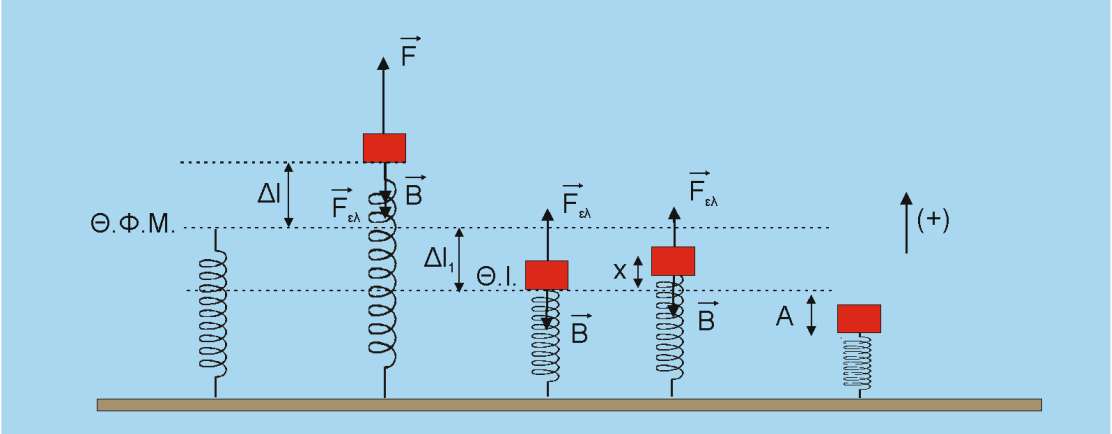
ζ. να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης από τη στιγμή t = 0 έως τη στιγμή που το σώμα θα περάσει για 13η φορά από τη θέση $x_1 = -0,1m$

η. να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα δέχεται συνισταμένη δύναμη ΣF = 10N και η ταχύτητά του αυξάνεται κατά μέτρο. Πώς ερμηνεύετε το πρόσημο του αποτελέσματος;

θ. να γράψετε τη συνάρτηση της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση και να την παραστήσετε γραφικά. Να δικαιολογήσετε γιατί το πρόσημο της τιμής της δύναμης ελατηρίου μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Δίνεται $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $g = 10\ m/s^2$

Απάντηση



α. Επειδή F > mg, το σώμα θα δέχεται $\vec{F}_{ελ}$ προς τα κάτω. Επομένως η Θ.Φ.Μ. είναι χαμηλότερα από την αρχική θέση του σώματος, έστω κατά Δl. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=0\rightarrow F-F_{ελ}-B=0\rightarrow F-k\cdot\Delta\ell-m\cdot g=0\rightarrow\Delta\ell=0{,}1\,m$$

Μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ η θέση ισορροπίας θα βρίσκεται κάτω από τη Θ.Φ.Μ. έστω κατά Δl_1 και θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=0\rightarrow F_{ελ}-B=0\rightarrow k\cdot\Delta\ell_1-m\cdot g=0\rightarrow\Delta\ell_1=0{,}1\,m\quad(1)$$

Επειδή τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν, θα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του και έτσι το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A = \Delta l + \Delta l_1 = 0{,}2m$.

β. Στην τυχαία θέση x είναι

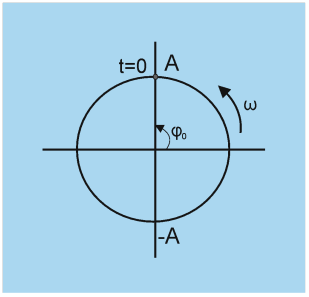
$$\Sigma F=F_{ελ}-B\rightarrow\Sigma F=k\cdot(\Delta\ell_1-x)-m\cdot g\rightarrow\Sigma F=k\cdot\Delta\ell_1-k\cdot x-m\cdot g\xrightarrow{(1)}\Sigma F=-k\cdot x$$

Άρα το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με D = k.

γ. Όταν το σώμα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, το ελατήριο θα έχει μέγιστη παραμόρφωση $\Delta\ell_{max} = A + \Delta\ell_1 \rightarrow \Delta\ell_{max} = 0,3m$

δ. $D = m \cdot \omega^{2} \overset{D=k}{\rightarrow} \omega = 10\ rad/s$

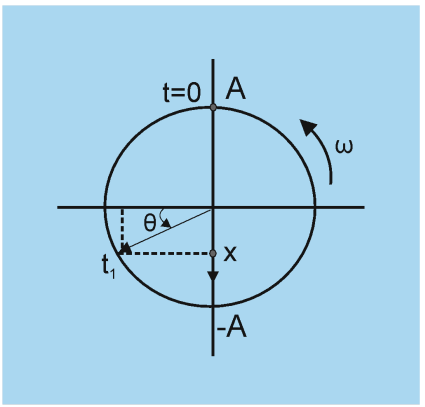
Τη στιγμή t = 0 το σώμα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του. Με τη βοήθεια του κύκλου έχουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$



Είναι

$$\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \rightarrow \alpha = -20 \cdot \eta\mu(10 \cdot t + \frac{\pi}{2})\ (S.I.)$$

ε. το σώμα θα βρεθεί για πρώτη φορά στη θέση $x_1 = -0,1m$ κατεβαίνοντας ($\upsilon < 0$). Με τη βοήθεια του κύκλου έχουμε



$$\eta\mu\theta = \frac{|x|}{A} \rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Η μετάβαση αντιστοιχεί σε μεταβολή φάσης

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta \rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Όμως $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow 10 = \frac{\frac{2\pi}{3}}{t_1} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15}s$

ζ. Την t = 0 είναι $x_{αρχ} = A = 0,2m$ και $x_{τελ} = -0,1m$.

Επομένως

$$\Delta U_{\Sigma F} = -W_{\Sigma F} \rightarrow U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = -W_{\Sigma F} \rightarrow \frac{1}{2} D x_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} D x_{\alpha\rho\chi}^2 = -1,5 J$$

Φυσικά το έργο δεν εξαρτάται από την ακολουθούμενη διαδρομή, αλλά μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος!

η. Είναι

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dx}{dt} \cdot \Sigma F \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon \quad (2)$$

Είναι $\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = -D \cdot x \rightarrow 10 = -100 \cdot x \rightarrow x = -0,1\,m$

Από Α.Δ.Ε.Τ. για x = -0,1m

$$E = K + U \rightarrow \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} D \cdot x^2 \rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{3}\ m/s$$

Όμως εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται κατά μέτρο, άρα κατευθύνεται προς τη Θ.Ι. από τα αρνητικά και έτσι $\upsilon = \sqrt{3}\ m/s$

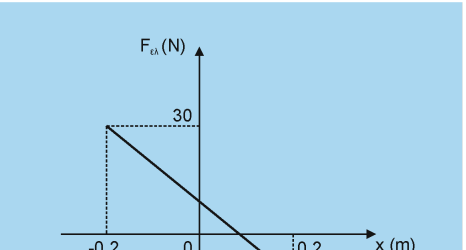
Άρα από τη σχέση (2) παίρνουμε για τη στιγμή αυτή

$$\frac{dU}{dt} = -10 \cdot \sqrt{3}\ \frac{J}{s}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι αρνητικός, αφού το σώμα τη στιγμή αυτή κατευθύνεται προς τη Θ.Ι. και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται.

θ. Στην τυχαία θέση του σώματος ισχύει

www.ylikonet.g



$$\Sigma F = -D \cdot x \rightarrow$$
$$\rightarrow B_{\varepsilon\lambda} - D = x \cdot \rightarrow$$
$$\rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m \cdot g - D \cdot x \rightarrow$$
$$\rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 100 \cdot x \,(S.I.),\ x \in [-0,2m,\ 0,2m]$$

Το πρόσημο της δύναμης ελατηρίου μεταβάλλεται, διότι όταν το σώμα περνά από τη Θ.Φ.Μ. η κατεύθυνση της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ μεταβάλλεται.

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com