

Exercice 1 :

Soit x un nombre réel et soit $F = (x + 1)(x + 3) - x(x + 2)$

- 1) Développer et simplifier F .
- 2) On pose $a = 10001 \times 10003 - 10^4 \times 10002$

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant la question précédente donner la valeur de a .

Exercice 2 :

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$$

- 1) Trouver deux réels a et b tels que $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ et $5a - b = 34$.
- 2) Trouver deux réels a et b proportionnels respectivement aux nombres 3 et 5 et tels que leur produit est égal à 735.
- 3) Trouver trois réels x , y et z proportionnels à 2, 3 et 5 respectivement tels que $2x + y - z = 26$.

Exercice 3 :

- 1) Développer $(a - \frac{1}{2})^2$, en déduire le signe de $a^2 - a + \frac{1}{4}$
- 2) Soient x et y deux réels vérifiant $x + y = 1$.

a) Montrer que $xy \leq \frac{1}{4}$ et que $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$

b) Dans cette question on suppose $x \in [2, 3]$ encadrer y ; xy et montrer que $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{6}$

Exercice 4 :

Soit x un réel strictement positif

- 1) a) Comparer $(1 + x)^2$ et $1 + 2x$
- b) lequel est plus grand $(1,000000000000003)^2$ ou $1,000000000000006$

2) a) Comparer $\frac{1}{1+x}$ et $1 - x$.

b) Comparer $\frac{1}{1,000000001}$ et $0,999999999$

3) Soit $0 < x < 1$ et soient $a = \frac{1+x}{1-x}$ et $b = 1 + 2x$

a) Calculer $a - b$ et comparer a et b .

b) Comparer $\frac{1,000000001}{0,999999999}$ et $1,000000002$

Exercice 5 :

Factoriser puis simplifier :

$$A = \frac{3ab - b}{ab} ; B = \frac{3ab - b + 6a - 2}{3a - 1} ; C = \frac{ab - 2b + (a - 2)(b - 3)}{3a - 6} ; D = \frac{(x + 1)^4 - (x - 1)^4}{8x^5 + 16x^3 + 8x} ; E = \frac{\frac{x^2}{4} + xy + y^2}{\frac{x^3}{8} + y^3} \text{ et } F = \frac{\frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 + b^3}}{\frac{a^3 - b^3}{a^2 - ab + b^2}}$$

Exercice 6 :

On pose pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $A(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$.

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $A(x) = 3 - \frac{4}{x + 1}$.

b) Donner un encadrement de $A(x)$ sachant que $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $A(x) + 2 = 0$ et $\frac{|3x - 1|}{x + 1} = 4$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $A(x) \leq -1$.

Exercice 7 :

1) a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} = \frac{1}{k(k + 1)}$

b) Calculer la somme $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2005 \times 2006}$

2) Montrer que : $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{999^2}\right)\left(1 - \frac{1}{1000^2}\right) = 0,5005$

- 3) Comparer les réels x et y avec $x = \frac{1}{0,99999997}$ et $y = 1,00000003$

Exercice 8:

- 1) On pose $x = \frac{\sqrt{2}-3}{1+\sqrt{2}}$
- a) Démontrer que $x = 5 - 4\sqrt{2}$
- b) Sachant que $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ donner sans calculatrice un encadrement de x .
- 2) On donne $A = \frac{a^2-1}{1+a^2}$ et $B = \frac{2a}{1+a^2}$, avec a réel quelconque. Montrer que les nombres A ; B et $A^2 - B^2$ appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 9 :

- 1) a) Développer $(x+1)^3$
b) En déduire une façon rapide de calculer 101^3
- 2) a) Développer $(a-b)^3$
b) En déduire une façon rapide de calculer 999^3
- 3) a) Développer $A = (a+1)(a-1) - a^2$
b) En déduire la valeur de $10001 \times 9999 - 10^8$

Exercice 10:

- 1) Soit la somme $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$. Calculer $x.S$ puis $(1-x).S$
- 2) On suppose que x est différent de 1 ; montrer que $S = \frac{x^{11}-1}{x-1}$
- 3) En déduire les valeurs des sommes suivantes : $S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$
et $S_2 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{10}$

Exercice 11 :

x ; y étant deux réels de l'intervalle $I =]-1, 1[$

- 1) Donner un encadrement du réel $\frac{x+4}{x+3}$

- 2) Montrer que $\frac{x.y}{1+xy} \in I$

- 3) Lorsqu'on augmente le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$ d'un réel x on obtient $\frac{7}{9}$. Déterminer x .

Exercice 12 :

- 1) soit $x = \sqrt{5\sqrt{2} + \sqrt{14}}$ et $y = \sqrt{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}$
- a) Calculer $x.y$ et $(x+y)^2$.
- b) Ecrire plus simplement $\frac{x+y}{x-y}$

- 2) a et b deux réels tels que $1 \leq a \leq 2$ et $4 \leq b \leq 5$ encadrer $2a - 3b$, $a.b$ et $\frac{a}{b}$

Exercice 13 :

Soient a et b deux réels vérifiant $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$

- 1) Donner un encadrement de $(a+b)$; a^2 et $a^2 b$
- 2) Comparer $a^2 b$ et $|a|$
- 3) a) Développer $(a-1)(1-b)$
b) En déduire le signe de l'expression $S = (a+b) - ab - 1$

Exercice 14 :

- 1) Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que :

- a) $\frac{3a-b}{a} \leq \frac{4a}{a+b}$ b) $\frac{2a}{a+1} \leq \sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$ c) $(1+a)(1+b) \geq 4\sqrt{ab}$
- 2) Soient a ; b et c trois réels strictement positifs.

a) Montrer que $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$

b) Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2(a+b)}{a^2+b^2}$

c) En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2}$