

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz środkowy wyraz rozwinięcia $\left(x - \frac{2}{3}\right)^{16}$.

Wynik przedstaw w postaci $a \cdot x^n$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–2)

Dana jest dodatnia liczba a i dodatnia liczba b :

$$a = 36^{\log_4 2\sqrt{5} \cdot \log_6 16 - 2 \log_6 2}$$

$$b = 8 \log_4 2\sqrt{2} - \log_4 9 \cdot \log_3 4$$

Oblicz, ile razy liczba $\sqrt{a \cdot b}$ jest większa od liczby $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Wśród pewnej społeczności kobiet i mężczyzn przeprowadzono ankietę w której zadano pytanie: „Czy jest Pan/Pani za legalizacją posiadania broni palnej w Polsce?”. W tej grupie osób 60% ankietowanych stanowią kobiety, z których 2% opowiedziało się za legalizacją oraz 93% mężczyzn jest jej przeciwna. Spośród wszystkich ankietowanych wybrano losowo jedną osobę oraz okazało się, że osoba ta jest zwolennikiem posiadania broni palnej.

Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba jest kobietą.

Wynik zapisz w postaci procentu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^8 - 5x^6 + 4x^3 - 2x + 4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że funkcja f ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej dwa miejsca zerowe przeciwnych znaków.

Zadanie 6. (0–3)

Funkcja $f(x) = \sqrt{9x + 16}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \left[-\frac{16}{9}; +\infty\right)$.

Punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$2x^2 + 6x + 18 + \dots > 9$$

gdzie lewa strona nierówności jest sumą zbieżnego, nieskończonego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne ośmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie dwa razy cyfra 2 i dokładnie trzy razy cyfra 3.

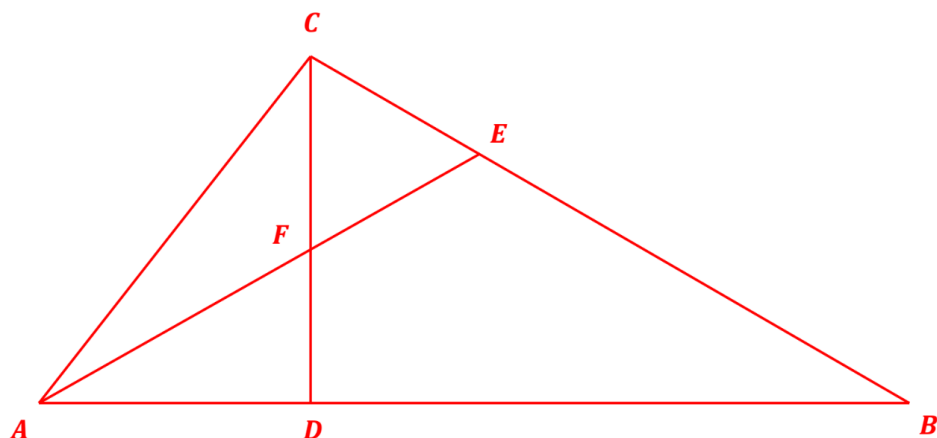
Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC o polu równym 8, w którym podstawa $|AB|$ ma długość 4.

Z wierzchołka C poprowadzono wysokość $|CD|$ na bok $|AB|$ trójkąta ABC .

Z kąta CAB poprowadzono odcinek, który przecina bok $|BC|$ w punkcie E takim, że punkt E leży na symetralnej odcinka $|AB|$ oraz $|BE| = \sqrt{13}$. Odcinek $|AE|$ przecina wysokość $|CD|$ w punkcie F i tworzy czworokąt $DBEF$ (zobacz rysunek).



Oblicz długość boku $|AC|$ tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Parabola $y = -x^2 + 4x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ w punktach o współrzędnych (x, y) . Punktem kratowym nazywamy taki punkt, który w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) ma obie współrzędne x i y będące liczbami całkowitymi.

Oblicz pole trójkąta ograniczonego punktami kratowymi przecięcia paraboli z okręgiem oraz początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

Rozwiąż równanie

$$\sin(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

w zbiorze $(-2\pi, 0]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(m + 1) \cdot x^2 + (m^2 - 1) \cdot x + m^2 + 3m + 2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie stożki o polu powierzchni bocznej $9\sqrt{3}\pi$, których promień podstawy ma długość nie większą niż $2\sqrt{3}$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich stożków w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{243r^2 - r^6}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Objętość V stożka w zależności od długości r promienia podstawy jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{243r^2 - r^6}$$

dla $r \in (0, 2\sqrt{3}]$.

Wyznacz długość r promienia podstawy tego z rozważanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.