BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt Δ tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H' các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H' qua phép chiếu song song nói trên.

Chú ý. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây, ta chỉ xét các phép chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định lí 1

a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

III. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của các hình thường gặp

+ **Tam giác:** Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,v.v…)

+ **Hình bình hành:** Một hình bình hành bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật…)

+ **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

+ **Hình tròn:** Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,…)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

a. Một tam giác cân.

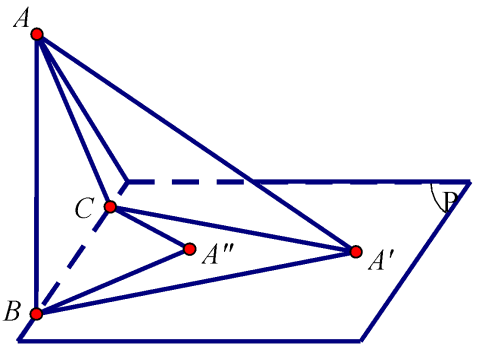
b. Một tam giác vuông.

Giải

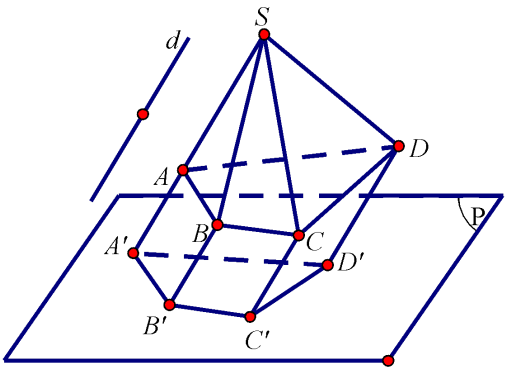
Qua BC dựng mặt phẳng (P) không qua A.

a. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA' cân tại A'. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA' biến tam giác ABC thành tam giác BCA'.

b. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA" vuông tại A". Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA" biến tam giác ABC thành tam giác vuông A"BC.



Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).



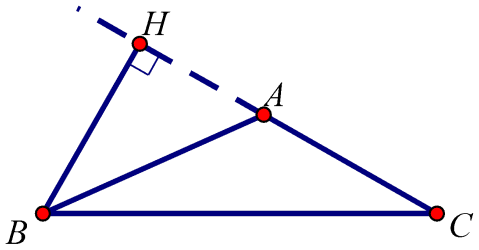
Giải

Vì phương chiếu d là SA nên SA cắt (P) tại A'. Các đỉnh B, C, D có hình chiếu trên (P) lần lượt là B', C', D' $\left(BB' \parallel AA', CC' \parallel AA', DD' \equiv AA'\right)$. Vậy hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên (P) là tứ giác A'B'C'D'.

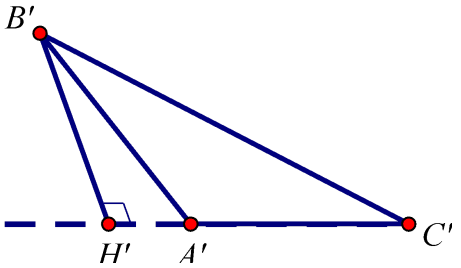
Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

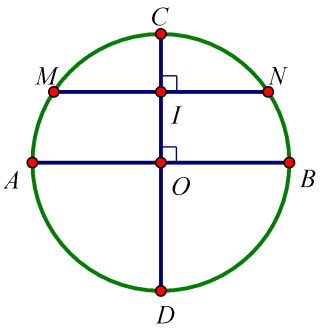
Giải

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây dung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

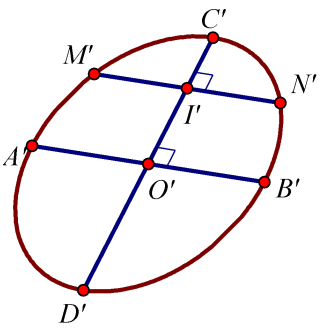
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm O' và đường kính A'B' (qua O') của nó.
- Vẽ dây cung $M'N' \parallel A'B'$.
- Lấy I' là trung điểm của M'N'.

Đường thẳng O'I' cắt elip (E) tại C', D'. Ta có A'B' và C'D' là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



Hình biểu diễn

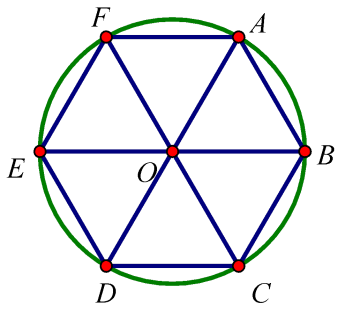
Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

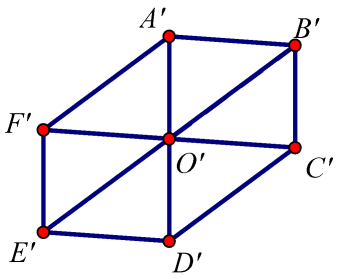
Giải

Xét hình lục giáo đều ABCDEF, ta thấy:

- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'A'B'C' biểu diễn cho hình thoi OABC.
+ Lấy các điểm D', E', F' đối xứng với các điểm A', B', C' qua O'.
+ A'B'C'D'E'F' là hình cần vẽ.





Hình biểu diễn lục giác đều

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

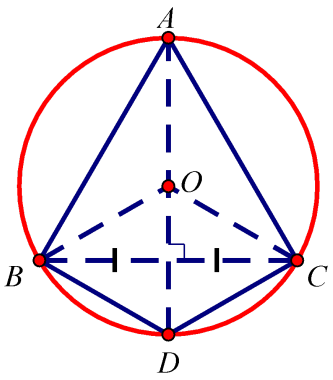
Giải

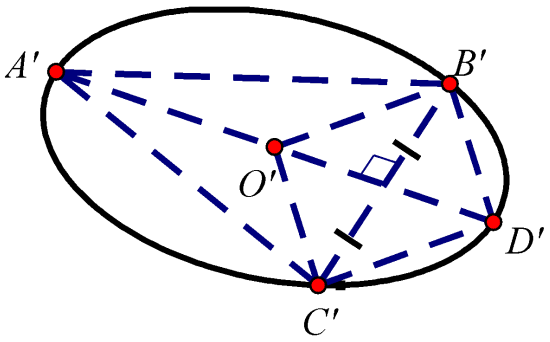
Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'B'D'C' biểu diễn cho hình thoi OBDC.

+ Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O'.

+ Tam giác A'B'C' là tam giác đều cần tìm.





Hình biểu diễn tam giác đều

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

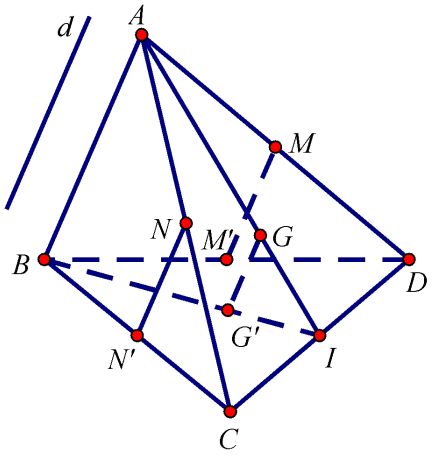
a. Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Giải

a. Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).
- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.



Trong tam giác IAB, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{IG}{IA}=\frac{IG'}{IB}\\ \frac{IG}{IA}=\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{IG'}{IB}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:

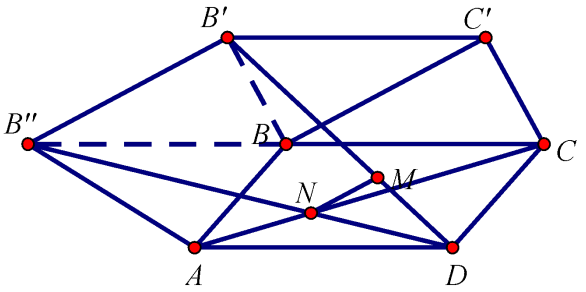
- BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.
- BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.

Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN\parallel BC'$.

Giải

- Phân tích:

Giả sử đã tìm được $M\in DB'$ và $N\in AC$ sao cho $MN\parallel BC'$.



Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD). Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B''. Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC. Từ đó, ta có cách dựng như sau:

- Cách dựng:

+ Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD).

+ Dựng N là giao điểm của DB'' và AC.

+ Trong mặt phẳng (DB'B''), ta kẻ $NM\parallel B'B''$ cắt DB' tại M.

Vậy M và N là các điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.

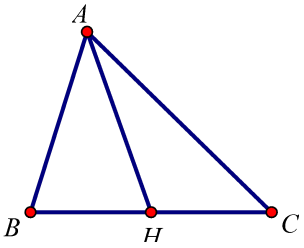
C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

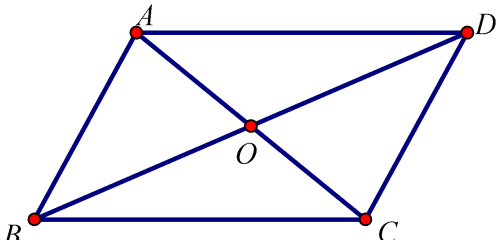
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Trên hình A có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình B có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hình A



Hình B

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. ABC là tam giác đều.

B. ABC là tam giác cân tại A.

C. ABCD là hình thoi.

D. B và C đúng.

Hướng dẫn giải

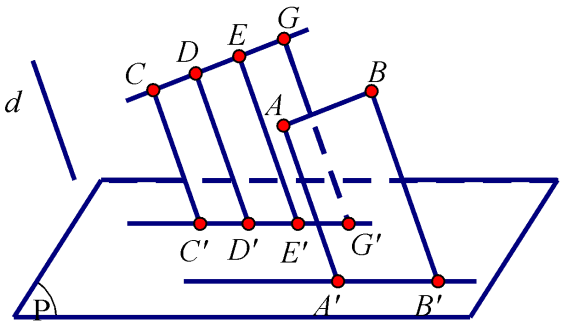
ĐÁP ÁN D.

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A □ B đúng.

- Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD, AC \parallel BD$ nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi □ C đúng.

Câu 3. Trên hình C, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P); $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Hình C

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$.

B. $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$.

C. $D'G' = A'B'$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

The định lí 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

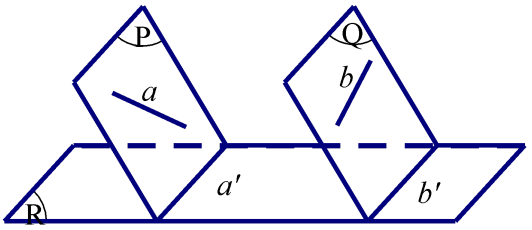
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b. Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a. Giả sử (P) song song với (Q). Ta chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b'. Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.



Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a' và b' luôn luôn cắt nhau.

B. a' và b' có thể trùng nhau.

C. a và b không thể song song.

D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Gọi l là phương chiếu, (α) và (β) là các mặt phẳng song song với l và lần lượt đi qua a và b. Khi đó nếu (α) và (β) cắt nhau thì a' và b' cắt nhau, nếu (α) và (β) song song thì a' và b' song song.

Câu 6. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

A. a và b phải song song với nhau.

B. a và b phải cắt nhau.

C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

D. a và b không thể song song.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu $a' \parallel b'$ thì $mp(a,a') \parallel mp(b,b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 7. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D'. Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?

A. A'B'C'D' là bốn đỉnh của một hình bình hành.

B. D' là trọng tâm tam giác A'B'C'.

C. D' là trung điểm cạnh A'B'.

D. Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bốn điểm không đồng phẳng A', B', C', D' không thể thẳng hàng.

Câu 8. Hình chiếu song song của một hình thang ABCD không thể là hình nào dưới đây?

A. Hình bình hành.

B. Hình tam giác cân.

C. Đoạn thẳng.

D. Bốn điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.