

Funktionsundersøgelse

Definitionsmængden for funktionen $f(x)$: $D_m(f)$

Hvad er det?

- De x 'er, som f kan anvendes på.

Hvordan findes den?

- Som regel angivet ved siden af funktionen eller i teksten. Hvis der ikke står noget må man gå ud fra, at alle reelle tal kan bruges som x . MEN hvis funktionen er $f(x) = \sqrt{x}$ så må x jo ikke være negativ og så er definitionsmængden alle ikke negative tal. Der kan også være "huller" i $D_m(f)$ hvis der $f(x)$ er en lodret asymptote¹.
- Pas på ved følgende funktioner: Logaritmefunktioner - $\ln(x)$ eller $\log(x)$ - her skal $x > 0$; Kvadratrodd - $\sqrt{x}$ - her skal $x \geq 0$; Brøker - her skal nævneren være forskellig fra 0.

Svaret/løsningen skrives som:

- $D_m(f) = [-3; 4]$ eller $D_m(f) =]-\infty; -3]$ eller $D_m(f) = \mathbb{R}$ (det sidste betyder fra minus uendelig til plus uendelig)

Nulpunkter

Hvad er det?

- De x 'er, hvor $f(x) = 0$

Hvordan findes den?

- Løs ligningen $f(x) = 0$
- I Geogebra: Indtast funktionen i input-linjen. I CAS vinduet skrives: Løsninger[$f(x) = 0$]
- I Nspire: Definer funktionen først med $f(x) := x^3 + 2x + 7$ (husk, at Nspire kan ikke lave beregninger, hvis du skriver begrænsningerne for x her - det er kun når du tegner grafen, at du skal gøre det) og brug herefter kommandoen $solve(f(x) = 0, x)$.

Svaret/løsningen skrives som:

- Nulpunkter for f er $x = 0$, $x = 3$ og $x = 6$

Fortegnsundersøgelse

Hvad er det?

- Mellem nulpunkterne og ved "huller i $D_m(f)$ " har $f(x)$ samme fortegn². Nulpunkter og hullerne deler $D_m(f)$ i intervaller, hvor $f(x) > 0$ (positiv) eller $f(x) < 0$ (negativ).

Hvordan findes den?

- Løs ligningen $f(x) = 0$. Find "hullerne" i $D_m(f)$.
- Tag derefter et tilfældigt x , der ligger udenfor/mellem nulpunkterne/hullerne og sæt det ind i funktionsudtrykket for f . Så finder du ud af om funktionen er positiv eller negativ for det x . Og dermed i hele det interval.
- I Geogebra: Indtast funktionen i input-linjen. I CAS vinduet skrives: Løsninger[$f(x) < 0$] og Løsninger[$f(x) > 0$]
- I Nspire
 - Definer funktionen først med $f(x) := x^3 + 2x + 7$ (husk, at Nspire kan ikke lave beregninger, hvis du skriver begrænsningerne for x her - det er kun når du tegner grafen, at du skal gøre det) og brug herefter kommandoerne:
 - $solve(f(x) > 0, x)$
 - $solve(f(x) < 0, x)$

Svaret/løsningen skrives som:

- $f(x) > 0$ for $x \in]0; 3[$ eller som $f(x) > 0$ for $0 < x < 3$
- $f(x) < 0$ for $x \in]-\infty; 0[\cup]3; 6[\cup]6; \infty[$ eller som $f(x) < 0$ for $-\infty < x < 0$ og $3 < x < 6$ og $6 < x < \infty$

¹ Asymptoter er ikke pensum, så det er ikke aktuelt på matB HHX eller STX

² Det forudsætter, at f er kontinuert, men det tænker vi ikke på nu...

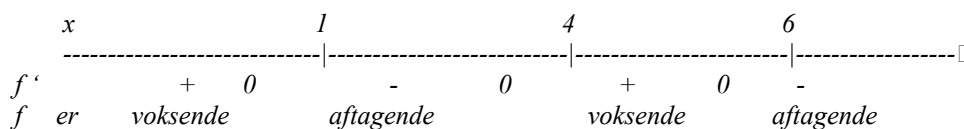
Monotoniforhold

Hvad er det?

- At finde de intervaller hvor funktionen vokser eller aftager.

Hvordan findes den?

- Differentier f og løs ligningen $f'(x)=0$.
- Lav fortegnundersøgelse for f' : Tag et tilfældigt x , der ligger udenfor/mellem nulpunkterne/hullerne og sæt det ind i funktionsudtrykket for f' . Så finder du ud af om funktionen f' er positiv eller negativ for det x . Og dermed i hele det interval. Dermed ved du også om f er voksende eller aftagende i det interval.
- I Geogebra:
 - Indtast funktionen i input-linjen.
 - Skriv " $f'(x)$ " og tryk [enter] i input-linjen
 - I CAS vinduet skrives:
 - $\text{Løsninger}[f'(x)=0]$ [enter]
 - $\text{Løsninger}[f'(x)>0]$ [enter]
 - $\text{Løsninger}[f'(x)<0]$ [enter]
- I Nspire:
 - Definer funktionen først med $f(x):=$
 - Så findes $f'(x)$ - kaldes $\text{fmærke}(x):=d/dx f(x)$
 - $f'>0$ med $\text{solve}(\text{fmærke}(x)>0,x)$
 - $f'<0$ med $\text{solve}(\text{fmærke}(x)<0,x)$
- Fortegnsundersøgelsen:
 - Lav tegningen



Svaret/løsningen skrives som:

- $f(x)$ er voksende for $x \in]-\infty; 1] \cup [4, 6]$ eller som $f(x)$ er voksende for $-\infty < x \leq 1$ og $4 \leq x \leq 6$
- $f(x)$ er aftagende for $x \in [1; 4] \cup [6, \infty[$ eller som $f(x)$ er aftagende for $1 \leq x \leq 4$ og $6 \leq x < \infty$

Ekstrema

Hvad er det?

- At finde de x 'er hvor f har største og mindste værdi (lokalt og globalt)

Hvordan findes den?

- For de x 'er hvor $f'(x)=0$ OG $f'(x)$ skifter fortegn i x har funktionen et ekstremum.
- Hvis f vokser før x 'et er det et maksimum – hvis f aftager før x 'et er det et minimum.
- Herefter tager man alle de x 'er hvor $f'(x)=0$ og sætter x 'erne ind i regneforskriften for $f(x)$. og y -værdierne beregnes. Endepunkterne i $D_m(f)$ sættes også ind i $f(x)$.
- Herefter kan man se hvilke x 'er der er lokale og hvilke der er globale ekstrema.
- I Geogebra:
 - Indtast funktionen i input-linjen.
 - Skriv " $f'(x)$ " og tryk [enter] i input-linjen
 - I CAS vinduet skrives:
 - $\text{Løsninger}[f'(x)=0]$ [enter]
 - $\text{Løsninger}[f'(x)>0]$ [enter]
 - $\text{Løsninger}[f'(x)<0]$ [enter]
 - herefter kontrolleres i monotoniforholdene at f' skifter fortegn der hvor $f' = 0$.
 - Eventuelle endepunkter i $D_m(f)$ undersøges også.
 - Alle fundne x værdier indsættes ind i f for at se hvilke y -værdier de giver.
- I Nspire:
 - Findes $f'=0$ med $\text{solve}(f\text{mærke}(x)=0,x)$
 - herefter kontrolleres i monotoniforholdene at f' skifter fortegn.
 - Eventuelle endepunkter i $D_m(f)$ undersøges også.
 - Alle fundne x værdier indsættes ind i f for at se hvilke y -værdier de giver.

Svaret/løsningen skrives som:

- $f(x)$ har globalt maksimum i $x=1$ med maksimumværdien $f(1)=17$
- $f(x)$ har lokalt minimum i $x=4$ med minimumsværdien $f(4)=-3$
- osv...

Vendetangent (punkter med vendetangent)

Hvad er det?

- At finde de x 'er hvor f'' skifter humør". Dvs. skifter fra at "krumme opad" til at "krumme nedad" (eller omvendt).

Hvordan findes den?

- For de x 'er hvor $f''(x)=0$ OG $f''(x)$ skifter fortegn i x har funktionen en vendetangent.
- Herefter findes de tilhørende y -værdier ved at sætte x værdierne ind i $f(x)$.
- I Geogebra:
 - Indtast funktionen i input-linjen.
 - Skriv " $f'(x)$ " og tryk [enter] i input-linjen
 - Skriv " $f''(x)$ " og tryk [enter] i input-linjen
 - I CAS vinduet skrives:
 - Løsninger[$f''(x)=0$] [enter]
 - Løsninger[$f''(x)>0$] [enter]
 - Løsninger[$f''(x)<0$] [enter]
 - herefter kontrolleres at f'' skifter fortegn der hvor $f'' = 0$.
 - De x værdier hvor $f'' = 0$ og skifter fortegn er der vendetangent.
- I Nspire:
 - Først findes $f''(x)$ - kaldes fmærkemærke(x)
 - så findes $f''>0$ med *solve(fmærkemærke(x)>0, x)*
 - og $f''<0$ med *solve(fmærkemærke(x)<0, x)*
 - og $f''=0$ med *solve(fmærkemærke(x)=0, x)*
 - De x værdier hvor $f'' = 0$ og skifter fortegn er der vendetangent.

Svaret/løsningen skrives som:

- $f(x)$ har vendetangent i punktet (3,7) og (5,-3)

Værdimængde

Hvad er det?

- De y værdier som man kan få ved at bruge f på x .

Hvordan findes den?

- Ekstrema og værdier i endepunkterne for $D_m(f)$ giver "udstrækningen" af værdimængden.

Svaret/løsningen skrives som:

- $V_m(f) = [-3;4]$ eller $V_m(f) =]-\infty; -3]$ eller $V_m(f) = \mathbb{R}_+$