

Pour éliminer x_1 de l'équation (2) on retranche la deuxième équation de la première, on obtient le système équivalent :

$$\begin{array}{lcl} (1) & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. \\ (2)-(1) = (3) & \left\{ \begin{array}{l} -2x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

Pour éliminer x_2 de l'équation (3) on ajoute la deuxième équation multipliée par (-2) à la troisième, on obtient le système triangulaire équivalent :

$$\begin{array}{lcl} (1) & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. \\ (-2) * (2') = (3') & \left\{ \begin{array}{l} -x_3 = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

En résolvant le dernier système de bas en haut, on obtient la solution $\{x_3 = -1, x_2 = -2, x_1 = 4\}$.

On peut traduire ces opérations d'éliminations par une écriture matricielle.

Dans le cas général, pour éliminer la variable x_1 de la deuxième équation on multiplie la première équation par α et on ajoute à la deuxième équation. Ce qui se traduit par la multiplication à gauche de la matrice A associée au système par la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, pour tout vecteur V de $\mathbb{R}^3$,

$$E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \alpha v_1 + v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Donc, si l'on souhaite annuler la 2^{ème} composante v_2 du vecteur V on choisit $\alpha = -\frac{v_2}{v_1}$.

Ainsi, si la première opération qui consistait à éliminer x_1 de la 2^{ème} équation se traduit par

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_1$$

Et la deuxième opération qui consistait à éliminer x_2 de la 3^{ème} équation se traduit par

$$E_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous présentons dans un premier temps la méthode la plus simple :

Élimination de Gauss sans pivot.

La méthode s'effectue en $(n-1)$ étapes

- la première étape consiste à éliminer x_1 de la 2^{ème} à $n^{\text{ième}}$ équation
- la deuxième étape consiste à éliminer x_2 de la 3^{ème} à $n^{\text{ième}}$ équation
- la $k^{\text{ième}}$ étape consiste à éliminer x_k de la $(k+1)^{\text{ème}}$ à $n^{\text{ième}}$ équation
- la dernière étape consiste à éliminer x_{n-1} de la $n^{\text{ième}}$ équation.

Ce procédé d'élimination se traduit sous forme matricielle par $(n-1)$ multiplications à gauche de la matrice A par des matrices convenables $(E_i, 1 \leq i \leq n-1)$. de l'exemple précédent)

1.2 Description de la méthode de Gauss sans pivot

Les opérations d'éliminations définies précédemment n'affectent que les coefficients (a_{ij}) et (b_i) du système, il est plus commode de travailler sur le tableau constitué uniquement de ces coefficients :

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Notons $\tilde{A}_1$ la matrice élargie $(A^{(1)} | b^{(1)})$ où $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$. Nous donnons la description complète de la première et de la $k^{\text{ième}}$ étape de cette méthode.

1^{ère} Etape

Elle consiste à éliminer x_1 de la 2^{ème} à n^{ième} équation du système (2.1) ou de son équivalent (2.2). Ceci est réalisé en retranchant la i^{ème} ligne de la première multipliée par le facteur

$$f_i^{(1)} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

On obtient la nouvelle matrice $\tilde{A}_2 = (a_{ij}^{(2)})$ grâce aux formules :

$$(2.3) \quad \begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - f_i^{(1)} a_{1j}^{(1)} & \text{pour } 2 \leq i \leq n \text{ et } 2 \leq j \leq n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - f_i^{(1)} b_1^{(1)} & \text{pour } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Donc, la première ligne de cette nouvelle matrice $\tilde{A}_2$ ne change pas et d'après les formules (2.3) on a

$$a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{11}^{(1)} = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

Cela se traduit par multiplier à gauche la matrice $\tilde{A}_1$ par la matrice de Gauss M_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_2^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & 0 \\ -f_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et 0 partout, sauf sur la première colonne. On vérifie facilement que $M_1 \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$ où $\tilde{A}_2$ est définie par (2.3).

En effet,

$$(M_1 \tilde{A}_1)_{ij} = \begin{pmatrix} -f_i^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & i & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nj}^{(1)} \end{pmatrix} = -f_i^{(1)} a_{1j}^{(1)} + a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}$$

On écrit alors $\tilde{A}_2 = M_1 \tilde{A}_1$.

Les formules (2.3) peuvent s'écrire également sous la forme :

$$(2.4) \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} + f_i^{(1)} a_{1j}^{(1)} \text{ pour } 2 \leq i \leq n \text{ et } 2 \leq j \leq n$$

Et matériellement

$$\tilde{A}_1 = L_1 \tilde{A}_2 \text{ où } L_1 = M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_2^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n^{(1)} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$L_1 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_2^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n^{(1)} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -f_2^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_n^{(1)} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

On continue ce processus d'élimination (k-1) fois, on obtient la matrice $\tilde{A}_k$

$$\tilde{A}_k = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & \text{---} & \text{---} & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} & \text{---} & | \\ & & & & \uparrow & & & & \uparrow \\ & & & & k & & n-k+1 & & n+1 \end{array}$$

Etape k

Cette étape consiste à éliminer x_k de la $(k+1)^{\text{ième}}$ à la $n^{\text{ième}}$ équation. En supposant $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ nous obtenons les formules suivantes :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - f_i^{(k)} a_{kj}^{(k)} \text{ pour } k+1 \leq i \leq n \text{ et } k+1 \leq j \leq n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - f_i^{(k)} b_k^{(k)} \end{array} \right.$$

Les k premières lignes ne sont pas affectées par les formules (2.5), elles restent inchangées.

En revanche, on retranche de la $i^{\text{ème}}$ ligne la $k^{\text{ième}}$ multipliée par le facteur $f_i^{(k)}$; $k+1 \leq i \leq n$, ce qui revient à éliminer la variable x_k de la $(k+1)^{\text{ième}}$ à la $n^{\text{ième}}$ équation

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \text{ pour } k+1 \leq i \leq n.$$

Le but de cette étape est donc atteint et $\tilde{A}_{k+1}$ s'écrit sous la forme :

$$\tilde{A}_{k+1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right)$$

$\begin{array}{c} | \text{-----} | \text{-----} | \uparrow \\ \quad k \quad \quad n-k \quad \quad n+1 \end{array}$

Cela se traduit par

$$\tilde{A}_{k+1} = M_k \tilde{A}_k \text{ où } M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & . \\ . & 0 & 1 & 0 & & & . \\ . & & 0 & 1 & 0 & & . \\ . & & & -f_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & . \\ . & & & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & -f_n^{(k)} & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après (n-1) étapes on obtient la matrice triangulaire

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} \times & . & . & . & . & . & \times \\ 0 & \times & . & . & . & . & \times \\ 0 & 0 & \times & . & . & . & \times \\ 0 & . & 0 & \times & . & . & \times \\ 0 & . & . & 0 & \times & . & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

On note $\tilde{A}_n = (U \mid b^{(n)})$ où U est triangulaire supérieure et $b^{(n)}$ la (n+1) ième colonne de $\tilde{A}_n$.

La résolution du système $Ux = b^{(n)}$ s'obtient de bas en haut à l'aide des formules suivantes

$$(2.6) \quad x_n = \frac{b^{(n)}}{u_{nn}} ; x_i = \frac{b^{(n)} - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \text{ pour } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Remarque 2.1

Les matrices L_k sont inverses des matrices M_k , elles sont carrées, triangulaires inférieures et n'ont que 1 sur la diagonale principale. On peut les écrire sous la forme

$$L_k = M_k^{-1} = I + g^{(k)} e_k^T$$

où

$$g^{(k)} \in R^n ; g_i^{(k)} = 0, 1 \leq i \leq k ; g_j^{(k)} = f_j^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, k+1 \leq j \leq n$$

et

e_k^T est la transposée du $k^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de R^n

1.3 Factorisation LU

La procédure d'élimination précédente se traduit par l'écriture matricielle suivante :

$$M_{n-1} \dots M_1 A = U \text{ où } A = (M_{n-1} \dots M_1)^{-1} U$$

ou encore
$$A = (M_1)^{-1} \dots (M_{n-1})^{-1} U = (L_1 \dots L_{n-1}) U$$

On note $L = L_1 \dots L_{n-1}$.

Comme

$$L_k = I + g^{(k)} e_k^T \text{ alors } L = (I + g^{(1)} e_1^T)(I + g^{(2)} e_2^T) \dots (I + g^{(n-1)} e_{n-1}^T)$$

ou encore

$$L = I + g^{(1)} e_1^T + g^{(2)} e_2^T + \dots + g^{(n-1)} e_{n-1}^T$$

car $g^{(i)} e_i^T g^{(j)} e_j^T = 0$ si $j > i$;

$$e_i^T g^{(j)} = (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f_{j+1}^{(j)} \cdot \leftarrow j+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n^{(j)} \end{pmatrix} = 0$$

On a donc

$$(2.7) \quad A = L U$$

Avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure régulière

Dans ce cas, on dit que A admet la décomposition ou la factorisation LU. Nous étudions l'existence et l'unicité de cette factorisation.

Proposition 2.1

Si une matrice A régulière admet la décomposition LU vérifiant (2.7), alors cette décomposition est unique

Preuve

Supposons que $A = L_1 U_1$ et $A = L_2 U_2$ on a alors $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$.

Comme $L_2^{-1} L_1$ est triangulaire inférieure à diagonale unité et $U_2 U_1^{-1}$ est triangulaire supérieure, $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I$, par conséquent $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Proposition 2.2

Une matrice A carrée d'ordre n régulière admet la décomposition LU vérifiant (2.7) si et seulement si, toutes les sous matrices principales de A sont régulières.

Preuve

Si $A = LU$ on a à l'aide de l'écriture par bloc :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & U_{22} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc} k & n-k \\ \hline k & n-k \end{array} \quad \begin{array}{cc} k & n-k \\ \hline k & n-k \end{array}$$

Où A_{11} , L_{11} , U_{11} sont les sous matrices d'ordre k , respectivement des matrices A , L et U .

Alors, $A_{11} = L_{11} U_{11}$ donc $\det(A_{11}) = \det(L_{11}) \det(U_{11}) = \prod_{i=1}^k u_{ii}$.

Comme $\det(A) = \det(L) \det(U)$ et que $\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \neq 0$, $\det(A_{11})$ est également non nul et par conséquent, toutes les sous matrices d'ordre k de A sont régulières.

Réciproque

On montre par récurrence sur k , que l'on peut réaliser la factorisation $A = LU$, si les $\det(A_{11})$ des sous matrices d'ordre k de A sont tous non nuls.

Pour $k = 1$ si a_{11} est non nul (sous matrice d'ordre 1) on peut effectuer la première étape de la procédure d'élimination de Gauss. Supposons maintenant que l'on puisse effectuer cette factorisation $k-1$ fois, on aura $A^{(k)} = M_{k-1} \dots M_1 A$ ou encore $A = L_1 \dots L_{k-1} A^{(k)}$

Posons $A = N B$; $N = L_1 \dots L_{k-1}$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $B = A^{(k)}$

$$A = N B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} N_{11} & 0 \\ \hline N_{21} & N_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

Donc $A_{11} = N_{11} B_{11}$ et $\det(A_{11}) = \det(N_{11}) \det(B_{11}) = \det(B_{11})$. Comme A_{11} est la sous matrice principale de A d'ordre k alors, par hypothèse de récurrence, $\det(A_{11})$ est non nul.

B est la matrice $A^{(k)}$ avec

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \times & \times & \times & | \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & | \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & | \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & | \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & | \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & | \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right)$$

|-----| ↑ |-----|
 $k-1 \quad k \quad n-k$

triangulaire supérieure en ses $(k-1)$ premières lignes et colonnes, donc B_{11} est triangulaire

supérieure et $\det(B_{11})$ est non nul. Le $k^{\text{ième}}$ pivot $a_{kk}^{(k)}$ est non nul, on peut continuer

l'élimination de Gauss et après $(n-1)$ opérations on obtient la factorisation LU.

1.4 Propriétés de l'algorithme d'élimination de Gauss sans pivot

Rapidité

La rapidité d'un algorithme se mesure par le nombre d'opérations nécessaires pour son exécution. D'après les formules (2.5) on a $(n-k)$ divisions pour calculer le facteur $f_i^{(k)}$, $(n-k)^2$ multiplications et additions pour obtenir les coefficients de la matrice $A^{(k)}$ et $(n-k)$ multiplications et additions pour obtenir les coefficients du vecteur $b^{(k)}$. Ce qui fait au total

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{additions et multiplications}$$

Et $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$ divisions

La résolution du système triangulaire nécessite quant à elle $n(n-1)/2$ multiplications et additions et n divisions.

Ainsi, on dit que l'algorithme d'élimination de Gauss est d'ordre $n^3/3$ (monôme de plus haut degré) et la résolution d'un système triangulaire est d'ordre $n^2/2$.

Place mémoire

Rappelons les formules (2.4) qui permettent de construire la matrice $A^{(k)}$ à partir de $A^{(k+1)}$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - f_i^{(1)} a_{1j}^{(1)} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n \text{ et } 2 \leq j \leq n$$

Une fois calculé le coefficient $a_{ij}^{(k+1)}$ on a plus besoin du coefficient $a_{ij}^{(k)}$ sa place peut être occupée par le nouveau coefficient $a_{ij}^{(k+1)}$. Par ailleurs, la matrice L triangulaire inférieure peut occuper la place libre dans la matrice triangulaire supérieure U pour obtenir à la fin la factorisation L U. Ainsi, l'algorithme d'élimination de Gauss n'exige que $n(n+1)$ places mémoire si l'on accepte d'écraser la matrice A et le second membre b du système donnée.

1.5 Méthode d'élimination de Gauss avec pivot total

La méthode précédente est la plus simple, mais elle ne peut être réalisée que si tous les pivots

$a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls. Ainsi, la matrice très simple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas être factorisée sous

la forme L U en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss sans pivot. Alors qu'en

permutant les deux ligne de cette matrice on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui admet bien la

factorisation évidente $L U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Algorithme

Pour $k=1, 2, \dots, n-1$

Soit P_{kl_k} la matrice obtenue à partir de la matrice identité en permutant les lignes en position k et l_k . Soit Π^{kl_k} la matrice obtenue à partir de la matrice identité en permutant les colonnes en position k et c_k .

$$a_{l_k c_k}^{(k)} = \max_{\substack{k \leq i \leq n \\ k \leq j \leq n}} \{a_{ij}^{(k)}\}$$

Les indices l_k et c_k sont tel que

et $P_{kl_k} A^{(k)} \Pi_{kc_k}$ permet de placer l'élément de plus grand module à sa bonne position k ième ligne et k ième colonne.

Après $(n-1)$ étapes on obtient $M_{n-1} P_{n-1 l_{n-1}} \dots M_1 P_{1 l_1} A \Pi_{1 c_1} \dots \Pi_{n-1 c_{n-1}} = U$

Où M_k est la matrice de gauss qui permet d'obtenir $A^{(k+1)}$ à partir de $A^{(k)}$; ce qui revient à faire apparaître des zéros sur la k ième colonne à partir de la $(k+1)$ ième ligne.

Notons $P = P_{n-1 l_{n-1}} \dots P_{1 l_1}$ et $\Pi = \Pi_{1 c_1} \dots \Pi_{n-1 c_{n-1}}$ et $L = P (M_{n-1} P_{n-1 l_{n-1}} \dots M_1 P_{1 l_1})^{-1}$.

Alors $P A \Pi = L$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure régulière.

Si $A \in R^{n \times n}$ est régulière, la méthode de Gauss avec pivot total s'obtient à l'aide du programme suivant :

Function [U,c] = GaussPivoTotal(n,A,b)

c = b

```
for k = 1 : n-1
```

```
    lmax = k ; cmax = k ; pivo = abs(A(k,k));
```

```
% recherche du pivot
```

```
    for i = k : n
```

```
        for j = k : n
```

```
            if abs(A(i,j)) > pivo
```

```
                lmax = i ; cmax = j ; pivo = abs(A(i,j)) ;
```

```
            end ;
```

```
        end ;
```

```
    end ;
```

```
% permuter la lignes k avec la ligne lmax
```

```
for j = k : n
```

```
    vt = A(k,j) ; A(k,j) = A(lmax,j) ; A(lmax,j) = vt ;
```

```
end;
```

```
% permuter la colonnes k avec la colonne cmax
```

```
X = A( : , k) ; A( : , k) = A( : , cmax) ; A( : , cmax) = X ;
```

```
d = 1 / A(k,k) ;
```

```
    for i = k+1 : n
```

```
        f = d*A(i,k) ;
```

```
        for j = k : n
```

```
            A(I,j) = A(I,j) - f*A(k,j) ; c(i) = c(i) - f*c(k);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
for i = 1 : n
```

```
    for j = i : n
```

```
        U(i,j) = A(i,j) ;
```

```
    end
```

```
end
```

```
end;
```

1.6 Méthode de Gauss avec pivot partiel

C'est la méthode la plus utilisée, à chaque étape k on permute, si nécessaire, deux lignes pour avoir un pivot optimal (le plus grand en module) en position (k, k) . On élimine ensuite la variable x_k dans les équations $k+1$ jusqu'à n . A la fin on obtient la décomposition

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$$

Où $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1$;

$\mathbf{L}$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité ;

$\mathbf{U}$ matrice triangulaire supérieure régulière.

Algorithme

Déterminer un pivot : choisir $p \in \{k, k+1, \dots, n\}$ vérifiant $|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$.

Permuter si nécessaire la k ième ligne avec p ième.

Pour $i = k+1$ jusqu'à n $d = 1/a_{kk}^{(k)}$

pour $j = k+1$ jusqu'à $n+1$ $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - d * a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}$

La résolution du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'obtient en déterminant d'abord la factorisation

$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ puis en résolvant les deux systèmes : $\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{Pb}$ et $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

Programme : Factorisation avec pivot partiel

Function $[\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{P}] = \text{GaussPivoPartiel}(\mathbf{A})$

$n = \text{max}(\text{size}(\mathbf{A}))$; $\mathbf{L} = \text{eye}(n)$;

for $k = 1 : n-1$

lmax = k ; pivo = abs(A(k,k));

% recherche du pivot

for i = k : n

```

    if abs(A(i,k)) > pivo
        lmax = i ; pivo = abs(A(i,k)) ;
    end ;
end ;

% permuter les lignes k avec lmax
for j = k : n
    vt = A(k,j) ; A(k,j) = A(lmax,j) ; A(lmax,j) = vt ;
end;

% Vp contient le vecteur de permutation
Vp(k) = lmax ;

% Triangularisation de la matrice A
d = 1 / A(k,k) ;
for i = k+1 : n
    fi = d*A(i,k) ; L(i,k) = fi ;
    for j = k : n
        A(i,j) = A(i,j) - fi*A(k,j) ; c(i) = c(i) - f*c(k);
    end
end
end;
U = A ;

% Construction de la permutation  $\sigma$  des lignes de A à partir de Vp
for i = 1 : n
     $\sigma(i) = i$ 
end
 $\sigma(1) = Vp(1)$  ;  $\sigma(Vp(1)) = 1$  ;

for i = 2 : n-1
    vt =  $\sigma(i)$  ;  $\sigma(i) = \sigma(Vp(i))$  ;  $\sigma(Vp(i)) = vt$  ;
end;

% Construction de la matrice de permutation  $P_\sigma$  associée à  $\sigma$ 
for i = 1 : n
    for j = 1 : n

```

```

    if i ==  $\sigma(j)$  P(i,j) = 1 ; else P(i,j) = 0 ;
end
end
end
? P = P' ?

% Construction de la matrice L
for k = 1 : n-1
    for i = k+1 : n-1
        if i  $\neq$  Vp(i)
            vt = L(i,k) ; L(i,k) = L(Vp(i),k) ; L(Vp(i),k) = vt ;
        end;
    end;
end;

```

Remarques

1 – On peut utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires pour inverser une matrice régulière. Ainsi, pour calculer la matrice inverse A^{-1} que l'on note X , il suffit de résoudre le système $A X = I$. Cela revient à résoudre les n systèmes $A x_j = e_j$ où x_j est la j ième colonne de A^{-1} et e_j est le j ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2 – Le calcul de A^2 à partir de A nécessite n^3 multiplication et $n^2 (n-1)$ additions, presque autant d'opération que pour calculer A^{-1} .