Câu 1. **[2D3-2.12-3] (Chuyên KHTN lần2) (Chuyên KHTN lần2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)f(x)}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f(\sqrt{3})$ bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}}$. **B.** $\sqrt[3]{2}$. **C.** $\sqrt[3]{9}$. **D.** 2.

Lời giải.

Tác giả: Lê Tuấn Anh, Fb: Anh Tuan Anh Le

Phản biện: Ngô Nguyễn Anh Vũ, Fb: Euro Vu

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)f(x)}},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}.f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int\sqrt{f(x)}.f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Rightarrow \int\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}f(x)\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+C \Rightarrow f(x)\sqrt{f(x)}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+C\right).$$

Vì $f(0)=1$ nên $1=\dfrac{3}{2}(1+C)\Rightarrow C=-\dfrac{1}{3}$. $\Rightarrow f(x)\sqrt{f(x)}=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{3}\right)$

Vậy $\left[f(\sqrt{3})\right]^3=\dfrac{9}{4}\left(\sqrt{3+1}-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{25}{4}\Rightarrow f(\sqrt{3})=\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}}$.