

Câu 1. [2D3-2.12-3] (Chuyên KHTN lần2) (Chuyên KHTN lần2) Cho hàm số $f(x)$ có

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$ và $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)f(x)}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(\sqrt{3})$ bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$

B. $\sqrt[3]{2}$

C. $\sqrt[3]{9}$

D. 2

Lời giải.

Tác giả: Lê Tuấn Anh, Fb: Anh Tuan Anh Le

Phản biện: Ngô Nguyễn Anh Vũ, Fb: Euro Vu

Chọn A

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)f(x)}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int \sqrt{f(x)} \cdot f'(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Rightarrow \int \sqrt{f(x)} d[f(x)] = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} d(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} f(x) \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow f(x) \sqrt{f(x)} = \frac{3}{2} (\sqrt{x^2+1} + C)$$

Vì $f(0) = 1$ nên $1 = \frac{3}{2} (1 + C) \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) \sqrt{f(x)} = \frac{3}{2} \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{3} \right)$

Vậy $[f(\sqrt{3})]^3 = \frac{9}{4} \left(\sqrt{3+1} - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt[3]{\frac{25}{4}}$