

TRƯỜNG THCS DỊCH VỌNG
ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ
II

NĂM HỌC 2022-2023. MÔN:
TOÁN 9

I. ĐẠI SỐ:

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM HỌC KỲ II

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, cách giải.
2. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$): tính chất, đồ thị hàm số.
3. Phương trình bậc hai: định nghĩa, cách giải.
4. Hệ thức Vi-et và ứng dụng.
5. Giải các phương trình quy về phương trình bậc hai.
6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

II. HÌNH HỌC:

1. Các loại góc liên quan đến đường tròn.
2. Tứ giác nội tiếp.
3. Độ dài đường tròn, cung tròn. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn.
4. Diện tích, thể tích các hình: Hình trụ, hình nón, hình cầu.

B. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THAM KHẢO

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Rút gọn biểu thức và bài toán tổng hợp.

Câu 1. Cho biểu thức: $A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 3) Tìm giá trị của x để $A = 1$.

2

- 4) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

√

5) Tìm m để phương trình $m \cdot A = \frac{-2}{x}$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tìm các giá trị của x để $A < 1$.

7) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.
(với

Câu 2.
thức

Cho biểu

$$B = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) : \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$x \geq 0, x \neq 1)$$

$$\frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) : \frac{x+1}{x^2-1}$$

√

it gọn biểu thức B.

nh giá trị của B khi $x = 3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

3) Tìm x để $B = x$

4) Với $x \in \mathbb{A}^1$, hãy so sánh B và B

Câu 3.

Cho biểu thức $C = \frac{2x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

1) Rút gọn biểu thức C.

2) Tính giá trị của C, biết $x = \frac{2}{3}$.

3) Tìm giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

4) So sánh $\frac{1}{C}$ với 1.

Câu 4.

Cho hai biểu thức

$A =$

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2}$$

1) Tính giá trị biểu thức A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = AB$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P| + P = 0; |P| = -P$

Câu 5.

Cho hai

biểu thức $B =$

$$\frac{x^2 - 6}{x^2 - 2}$$

$$\sqrt{\sqrt{x}} \text{ và } A =$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{4-x}$$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

2) Chứng minh rằng $B =$

3) Cho $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $P = 0$.

Câu 6. Cho $A = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{(2x - y)(2x + y)(2x - 5y)} : \frac{4x^2 - y^2}{4x^2 - y^2}$.

a) Rút gọn A.

b) Với giá trị x, y nguyên dương nào thỏa mãn $x + 2y = 14$ thì A nhận giá trị nguyên dương.

Dạng 2: Phương trình bậc hai và quan hệ giữa (d), (P)

Câu 1. Cho phương trình ẩn x : $mx^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình:

1) Có nghiệm duy nhất

2) Có nghiệm

Câu 2.
ân x :

Cho phương trình



1) Giải phương trình với $m = 1$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm dương.

3) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

4) Chứng minh

$$M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) \text{ không phụ thuộc vào } m.$$

5) Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là

là nghiệm của pt (1))

$$x_1 x_2$$

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn:

1) $x_1^2 + x_2^2 = 3$

2) $2x_1 - 5x_2 = -8$

3) $x_1^2 - x_2^2 = 15$

4) $x_1^3 + x_2^3 = 11$

5) $x_1 - x_2 = 1$

6) $x_1 + x_2 = 2$

7) $x_1^5 + x_2^5 = 0$

8) $x_1 - x_2 > 2$

$$x_2^2 - x_1^2 = 2$$

Câu 4. Cho phương trình:

$$x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$$

1) Giải phương trình khi

$$m = 1$$

2) Tìm m để $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 - 2mx_2 = 9$.
 phương trình có
 hai nghiệm
 phân biệt

1 2 1 1

Câu 5. Cho phương trình: nghiệm $x^2 - 2(m+1)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai

$x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + 2$ và parabol $(P): y = x^2$

1) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P) .

2) Tính chu vi và diện tích tam giác AOB .

Câu 7. Cho $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 4$

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = -2$

2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m .

Điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) $y_1 \neq y_2 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \neq 0$.

Cho đường thẳng (d) : $y = 2x + m^2 + 1$ và (P) : $y = x^2$

- 1) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A; B$.
- 2) Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.

Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$1) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^3 = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^3 = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4(x + 1) - (x + 2y) = 9 \\ 4(x + 1) - (x + 2y) = 9 \end{cases}$$

$$= -1$$

$$\begin{cases} 4(x + 1) - (x + 2y) = 9 \\ 4(x + 1) - (x + 2y) = 9 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + \sqrt{y} = 1 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

$$7) \begin{cases} x^2 + xy + y = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x + 1 = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = \frac{13}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 3)(y + 2) = xy - 5 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (x + 2)(y - 3) = xy + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{5}x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \end{cases}$$

$$3$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 7 = 6 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3 - x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 43 - x + y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

Câu 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - 2y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = a + 1 \end{cases}$$

□

1) Giải hệ phương trình với $a = -2$

2) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn điều kiện $x - y = 1$

3) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho x nhận giá trị nguyên

DẠNG 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Hai người làm chung một công việc sau 6 giờ thì xong. Nếu làm một mình, người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai là trong 3 giờ thì cả hai người làm

² công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong

5

công việc?

- Câu 2.** Hai đội công nhân cùng tu sửa một đoạn đường trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu mỗi đội làm một mình thì đội I cần ít hơn thời gian đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội cần bao lâu xong công việc?
- Câu 3.** Một ô tô đi từ đê đến trong một thời gian quy định. Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến sớm hơn quy định 2 giờ. Nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến chậm hơn quy định 3 giờ. Tính quãng đường .
- Câu 4.** Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.
- Câu 5.** Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng được chia thành bao nhiêu dãy.
- Câu 6.** Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.
- Câu 7.** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.
- Câu 8.** Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm 36cm^2 , và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26cm^2 .

HÌNH HỌC

- Câu 1.** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc (O) . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ AC, CB . Nối $MN \cap AC = I$. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC .

1. Tính $\widehat{M''IC}$.

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O; R)$.

3. Dựng hình bình hành $ADEF$. CMR : F thuộc đường tròn $(O; R)$.

4. Cho $\widehat{C}AB = 30^\circ$, $R = 10$ cm. Tính V hình tạo thành khi ΔABC quay một vòng quanh AB .

Câu 2. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây BC cố định. Điểm A thuộc cung lớn BC . Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D . Các tiếp tuyến của $(O; R)$ tại C và D cắt nhau ở E . Tia CD cắt AB ở K , đường thẳng AD cắt CE tại I .

ứng minh $BC \parallel DE$.

ứng minh $AKIC$ là tứ giác nội

p.

3) Cho $BC = R$

. Tính độ dài cung nhỏ theo R .

BC của đường tròn $(O;$

$R)$

3

√

4) AD cắt BC tại M . Chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$.

Câu 3. Cho $(O; R)$ và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm của CD . Nối BI cắt (O) tại E ($E \neq B$). Nối OM cắt AB tại H .

1) Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AE \parallel CD$.

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

4) Chứng minh HD là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A và B). Vẽ cùng nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM$ tại C , tia Cz cắt tia By tại K . Vẽ đường tròn tâm O , đường kính MC cắt MK tại E .

1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AM.BK = AC.BC$.

3) Chứng minh $\triangle AEB$ là tam giác vuông.

4) Cho nhất.

A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn

Câu 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R = 2R'$). Điểm B

thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường

tròn $(O; R)$ sao cho $MA \leq MB$. Nối MA cắt $(O'; R')$ tại N . Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt $(O'; R')$ tại E , cắt MB tại F .

1) Chứng minh $\Delta AOM \cong \Delta AON$.

2) Chứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $(O; R)$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao

____, CF cắt nhau tại H , cắt $(O; R)$ tại M và N .

- 1) Chứng minh $AFHE, BFEC$ nội tiếp.
- 2) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$
- 3) Chứng minh $MN \parallel EF$
- 4) Chứng minh $\frac{MN}{AH} = 2$
- 5) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Câu 7. Cho $(O; R)$, đường kính BC . Gọi A là điểm chính giữa của cung BC . Điểm M

thuộc đoạn BC

Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC, MN \perp FE$ tại N .

- a) Chứng minh: 5 điểm A, E, O, M, F cùng thuộc một đường tròn.
- b) $BE.BA = BO.BM$
- c) Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A cắt MF tại K . chứng minh: $BE = KF$.
- d) Khi M di chuyển trên BC . Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 8. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Bán kính OC vuông góc với AB .

Điểm E thuộc OC . Nối AE cắt nửa đường tròn tại M . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D .

- 1) Chứng minh $\triangle DME$ cân.
- 2) BM cắt OC tại K . Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC .
- 3) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.
- 4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$. Chứng minh khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 1. Chiếc nón làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 cm, đường kính 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón.

- Câu 2.** Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, độ dài trục là 12 cm. Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.
- Câu 3.** Một hình trụ có đường kính đáy bằng độ dài trục, một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ nói trên. Hãy so sánh thể tích của hai hình đó,
- Câu 4.** Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Diện tích xung quanh hình trụ bằng 36π (cm²). Tính bán kính đáy hình trụ.
- Câu 5.** Khi bơm căng, một quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm. Tính diện tích da dùng làm quả bóng nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt.

diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh bằng 10 cm, đường đáy bằng 8 cm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Câu 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 4 + 2y^2 + 2xy + 3y = 0$

Câu 2. Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 4} = 2$

Câu 3. Giải phương trình: $\frac{5x^2 - 1}{4x} - \frac{x^2 - 3x}{x + 8} = 5$

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq 2$. Tìm GTNN của biểu thức $K = x^2 + 2y^2$

Câu 5. Cho x là số thực thỏa mãn $-1 \leq x \leq 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$M = x^2 + y^2$$

Câu 6. Cho $x, y \geq 0; x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{1+x}$

Câu 7. Cho $a, b > 0; a + b \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P = a^2 + b^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Câu 8. Cho $a, b > 0; ab + a \leq 2b$. Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KỲ II - TOÁN 9

TRƯỜNG THCS DỊCH VỌNG

Năm học: 2022-2023

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Rút gọn biểu thức và bài toán tổng hợp.

Câu 1. Cho biểu thức: $A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

thức:

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 3) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$.
- 4) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.
- 5) Tìm m để phương trình $m \cdot A = \frac{1}{2}$ có hai nghiệm phân biệt.
- 6) Tìm các giá trị của x để $A < 1$.
- 7) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức A với $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

$$x \neq 1$$

$$\sqrt{\frac{+1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{+1}{\sqrt{x}}+1\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}-1\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)-\frac{3}{x}+1$$

$$A$$

$$\sqrt{\left(-1\right)\left(+1\right)^x\left(x+1\right)\left(-1\right)\left(+1\right)\left(-1\right)}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-2\right)^2+1}-3-1$$

$$A$$

$$\sqrt{x^2}\sqrt{\left(-1\right)\left(+1\right)}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2+1}}+\frac{x^2-2}{x^2+1}}= \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2+1}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2+1}}}= \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2+1}}$$

$$A = \frac{-x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$A = \frac{1}{x^2-1}$$

2) **Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$**

Ta có $A = \frac{1}{x^2-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$

Có $x = 9$ (thỏa mãn ĐKXD), nên $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{81-1} = \frac{1}{80}$

Thay $x = 9$ vào $A = \frac{1}{x^2-1}$ được $A = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1}$.

Vậy khi $x = 9$ thì $A = \frac{1}{80}$.

3) **Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$.**

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

-3 (vô lý vì

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 1$$

2

$x \geq 0, x \neq 1$)

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$.

2

4) Tìm giá trị của x để biểu thức A nguyên.

Ta có $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

A nguyên $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2 - 1 \in (x^2 + 1)\mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2 - 1 \in \{-1; 1\}$.

$x^2 - 1$	-1	1
x	0	2
x	0	4
	(thỏa mãn ĐKXĐ)	(thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy với $x = 0$ hoặc $x = 4$ thì biểu thức A nguyên.

1 m để
rơng trình

$m.A =$

-2 có hai nghiệm phân biệt.

√
√

$$m.A = x - 2$$

$$\Leftrightarrow m. \frac{1}{x-2} = -2$$

$$\Leftrightarrow -m = (x-2)(-2)$$

$$\Leftrightarrow -m = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x - m - 2 = 0$$

(**)

$$\text{Đặt } t = x - 2 \text{ (ĐK } t \geq 0; t \neq 1)$$

$$\text{Phương trình (*) trở thành } t^2 - t + m - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(m - 2) = 1 - 4m + 8 = -4m + 9$$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (**) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 9 > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ \Delta > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 9 > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{4} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Ta có $A = \frac{1}{1+x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$P > 0 \iff \sqrt{m-2} > 0$$

Vậy không có giá trị nào của m để $m.A = -2$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tìm giá trị của x để $A < 1$.

Ta có $A = \frac{1}{1+x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Để } A < 1 &\iff \frac{1}{1+x} < 1 \iff -1 < 1+x \iff x > -2 \\ &\iff x > -2 \end{aligned}$$

$$x \geq 0, x \neq 1)$$

Vậy với mọi không có giá trị nào của x để $A = \frac{1}{2}$.

7) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Ta có $A = \frac{1}{1+x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$



Dấu bằng xảy ra
khi và chỉ khi

$$+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

(thỏa mãn ĐKXD)



Vậy để giá trị nhỏ
nhất của

x

$$x = 0.$$

(với

$$x \geq 0, x \neq 1)$$

Câu 2.

Cho biểu

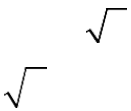
$$B = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} \right) :$$

$$\frac{x+1}{x}$$



$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} \right) :$$

1) Rút gọn biểu thức B.



2) Tính giá trị của B khi $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$.

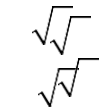
3) Tìm x để $B \leq x$

4) Với $x \neq 1$, hãy so sánh B và

$$\sqrt{B}$$

Lời giải

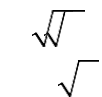
1) Rút gọn biểu thức B.



$$B = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$$



$$B \leq \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} \quad (x \neq 0, x \neq -1)$$



$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} \leq x$$

Đặt $x = 0$ hoặc $x = 1$ (với $x = 0, x = 1$)

$$x - 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x}{1}$$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$x \cdot 1$$

$$x \cdot 1$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

2) Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{3} - 2$

3) Tìm x để $B \geq x$

Do $B \geq x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} \geq x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \geq x - 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{2}x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \geq 0$$

Do nên

$$x - 1 - \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{2} \quad (\text{thỏa mãn}) \quad x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } x \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ thì } B \geq x$$

4) Với $x \in \mathbb{A}$, hãy so sánh B và B

Có $x \in \mathbb{A}$ nên $B \geq \frac{x^2 - 1}{x - 1} \geq 0$

$$\text{Xét } B^2 - B \geq 0$$

$$2 \geq 0$$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$



1 Có: $x = \frac{3 \pm 2 \pm 3 \pm 2 \pm 2 \pm 1 \pm 2 \pm 1 \pm 2 \pm 1 \pm 2 \pm 1 \pm 2}{2}$

1
1
1

$$\text{Với } x = \frac{2 \pm 1}{2} \text{ } B = \frac{x \pm 1}{2} = \frac{2 \pm 1}{2} \pm \frac{2 \pm 1}{2} \pm \frac{2 \pm 1}{2} \pm 3 \pm$$

$$\frac{x}{x} = \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

2



• $x \in 0$ (Do $x \in 1$)
 $x = 1$ $x = 2$
 B



Hay $B^2 = B \in 0$ $B^2 \in B$ $B \in B$



B
 Vậy $B \in$ khi $x \in 1$

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$$

1) Rút gọn biểu thức C .

2) Tính giá trị của C , biết $x = \frac{2}{3}$.

3) Tìm giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

4) So sánh $\frac{1}{C}$ với 1.

Lời giải

1) Rút gọn C .

$$x \neq 3 \text{ và } 2$$

$$x \neq 1$$

$$C = \frac{2x-9}{x-5} - \frac{1}{x-6}$$

$$(x \neq 0; x \neq 4; x \neq 9)$$

$$\frac{x-2}{x-2} - \frac{3-x}{3-x}$$

$$= \frac{2x-9}{x-5} - \frac{1}{x-6} - \frac{x-2}{x-2} + \frac{3-x}{3-x}$$

$$= \frac{2x-9}{x-5} - \frac{1}{x-6} - 1 + \frac{3-x}{3-x}$$

—

9

—

◀

$$= \frac{2x-9}{x-5} - \frac{1}{x-6} - 1 + \frac{3-x}{3-x}$$

Câu 3.

Cho biểu thức $C = \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x^2-2} - \frac{x+1}{3}$ (với $x \neq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x^2-2} - \frac{x+1}{3}$$

$$x \sqrt{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x^2-2} - \frac{x+1}{3}$$

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x^2-2} - \frac{x+1}{3}$$

2) Tính giá trị của C , biết $x = \frac{2}{3}$.

Có $x = \frac{2}{3}$ thay vào $C = \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x+3}{x^2-2} - \frac{x+1}{3}$

$$= \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 9 \cdot \frac{2}{3} + 9}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 6} - \frac{\frac{2}{3} + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2} - \frac{\frac{2}{3} + 1}{3}$$

$$= \frac{4 - 6 + 9}{\frac{4}{9} - \frac{10}{3} + 6} - \frac{\frac{11}{3}}{\frac{4}{9} - 2} - \frac{\frac{5}{3}}{3}$$

$$= \frac{7}{\frac{4 - 10 + 18}{9}} - \frac{11}{\frac{4 - 18}{9}} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{7 \cdot 9}{4 - 10 + 18} - \frac{11 \cdot 9}{4 - 18} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{63}{12} - \frac{99}{-14} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{63}{12} + \frac{99}{14} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{63 \cdot 7 + 99 \cdot 9 - 5 \cdot 28}{12 \cdot 14 \cdot 9}$$

$$= \frac{441 + 891 - 140}{1512}$$

$$= \frac{1192}{1512}$$

$$= \frac{149}{189}$$

1 giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

$$\sqrt{x-2}$$

Do $x \geq 0$ nên

$$x - 3 \geq -3$$

Để C có GTLN thì $\frac{1}{x-3}$ có GTLN

$$4 \leq 4$$

4

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{1}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 4$

Suy ra C có GTLN thì $\frac{1}{x-3} = 4 \Rightarrow 1 \leq 4 \Rightarrow 5$

Dấu " $\bullet$ " xảy ra khi $x = 16$

Vậy $x = 16$

thì GTLN của $C \bullet 5$

4) S với 1.

$\frac{1}{x-3} \bullet$

$\frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}$

Có

$\frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3}$

C

Do đó: $\frac{1}{x-3} \bullet 1$

$\frac{1}{x-3} \bullet 0$

$\frac{1}{x-3}$

C

C

$$C = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 4} - \frac{4}{x^2 - 3x + 4}$$



Câu 4. Cho hai biểu thức
A =

$$3x^2 - 4x + 3$$

2

$$x = 3 - 2$$



- 1) Tính giá trị biểu thức A với
- 2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = AB$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P| + P = 0$; $|P| = -P$.

Lời giải

$$B = \left(\frac{2}{x-2} - \frac{6-x}{x-2} \right) \cdot \frac{x-2}{x-2}$$

Câu 5. Cho hai biểu thức

$$A = \frac{2}{x-3}$$

$$B = \frac{x+2}{4-x} \cdot \frac{x+3}{x+3}$$



$$\left(\frac{x+2}{4-x} \right) \cdot \left(\frac{x+3}{x+3} \right)$$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$



- 2) Chứng minh rằng $B =$

$$\frac{1}{x-3}$$

- 3) Cho $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $P = 0$

Lời giải

Dạng 2: Phương trình bậc hai và quan hệ giữa $\left(\begin{smallmatrix} \\ d \end{smallmatrix} \right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \\ P \end{smallmatrix} \right)$

Câu 1. Cho phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m+3 = 0$. Tìm m để phương trình:
ân x :

- 1) Có nghiệm duy nhất
- 2) Có nghiệm.

Lời giải

1) Có nghiệm duy nhất.

TH1: $m = 0 \Rightarrow pt(1) : 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất

2

TH2: $m \neq 0$, để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow pt(1)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - m(m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

$$x = -\frac{b'}{a} = 2$$

a

Khi đó pt (1) có nghiệm kép là :

Vậy $m = 0$ hoặc

$m = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất .

2) Có nghiệm :

TH1: $m = 0 \Rightarrow pt(1) : 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất .

2

TH2 : phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ pt (1) có nghiệm Vậy $m \leq 1$ thì

|

phương trình (1) có nghiệm .

Câu 2. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2(m$

$$+1)x + m - 4 = 0$$

1) Giải phương trình với $m = 1$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm dương.

3) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

4) Chứng minh $M = x_1 (1 - x_2) + x_2 (1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m .

áp phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}x$ là nghiệm của pt

Lời giải

1) Giải phương trình với $m = 1$.

Thay $m = 1$ vào phương trình (1), ta có :

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 7$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 7$$

$$\sqrt{x - 2} = \sqrt{7}$$

$$|x - 2| = \sqrt{7}$$

$$|x - 2| = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{7}$$

$$\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là $x = 2 \pm \sqrt{7}$.

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm dương.

$$\text{Xét } \Delta' = (m+1)^2 - m + 4$$

$$= m^2 + m + 5 = m^2 + 2m + 1 - 1 + 5$$

$$= (m+1)^2 + 4$$

$$= (m+1)^2 + 4 \geq 4 > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m + 2 \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi - ét, ta có : $\begin{cases} P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m - 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m - 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 + 16m + 12 > 0$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ 4m^2 + 16m + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > 4 \end{cases} \Rightarrow m > 4$$

$$\begin{cases} P > 0 \\ m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \end{cases}$$

**3) Tìm m để
phương trình
(1) có 2 nghiệm
trái dấu.**

Để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

4) Chứng minh :

$M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m .

$$\text{Có : } M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$$

$$= (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 2m + 2 - 2(m - 4) = 10 \text{ không phụ thuộc vào } m. (\text{đpcm})$$

**5) Lập phương
trình bậc 2 có
hai nghiệm là**

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$$

$(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2})$ là nghiệm của pt (1))

Ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$

Phương trình cần lập là: $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - (2m - 2)x + (m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 4)x^2 - 2(m + 1)x + 1 = 0$$

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn:

1) $x_1^2 + x_2^2 = 3$

2) $2x_1 - 5x_2 = -8$

3) $x_1^2 - x_2^2 = 15$

4) $x_1^3 + x_2^3 = 11$

5) $x_1 - x_2 = 1$

6) $x_1 + x_2 = 2$

7) $x_1 + x_2 + \frac{5}{x_1 x_2} = 0$

8) $x_1 - x_2 > 2$

Lời giải

Phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$.

Ta có: $\Delta = 9 - 4(m - 1) = 13 - 4m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta > 0 \Rightarrow 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$$

4

Áp dụng định lí Vi-et

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 \end{cases}$$

$$1) x^2 + x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2m + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ (loại)}$$

Vậy không có giá trị m để thỏa

$$x^2 + x^2 = 3$$

$$\frac{11}{-21} = -8$$

$$2) 2x - 5x$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 & 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_1 = \\ -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 - 5x_2 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 & 2 \end{cases}$$

Thay vào

$$1 \cdot 2$$

$$1 \cdot 2 = m - 1$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \text{ (nhận)}$$

giá trị $m \in \mathbb{Z}$ thỏa $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 5^2$$

$$= 25$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4(m - 1) = 25$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị $m = 3$ thỏa

$$x_1^2 - x_2^2 = 15$$

$$4) x^3 + x^3 = 11$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 11$$

$$\Leftrightarrow 27 - 9(m - 1) = 11$$

$$\Leftrightarrow m = 25 \text{ (nhận)}$$

$$9 \quad m = 25 \text{ thỏa}$$

Vậy giá trị $m = 25$

$$x^3 + x^3 = 11$$

$$5) x_1 - x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4(m - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị $m = 3$ thỏa

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$6) x_1 + x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2(m-1) + 2m-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow m-1 = \frac{7}{2} + m$$

$$\{m \geq \frac{-7}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m-1 = \frac{-7}{2} + m \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \geq \frac{-7}{2} \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right. \text{ (nhận)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \geq \frac{-7}{2} \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \geq \frac{-7}{2} \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{-7}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m-1 = \frac{-7}{2} - m \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{-7}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \geq \frac{-7}{2} \\ m \geq \frac{-7}{2} \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{-7}{2} \text{ thỏa}$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Vậy giá trị

$$7 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = 5$$

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = 5$$

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = 5$$

$$(x_1 - x_2)^2 - 2x_1 x_2 = -5$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = -5$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = -5$$

(đk $m \neq 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{9 - 2(m - 1)}{m - 1} =$$

$$\frac{-5}{m - 1}$$

$$m - 1 = 2$$

$$\Rightarrow 18 - 4m + 4 =$$

$$-5m + 5$$

$$\Leftrightarrow m = -17 \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị $m = -17$ thỏa $x_1 + x_2 + 5 = 0$

$$x_2 - x_1 = 2$$

$$8) x_1 - x_2 > 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 > 4$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4(m - 1) > 4$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{9}{4} \text{ (nhận)}$$

$$\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị $m < \frac{9}{4}$

thỏa

$$x_1 - x_2 > 2$$

$$\frac{9}{4}$$

Câu 4. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

1) Giải phương trình khi

$$m = 1$$

2) Tìm $x_1 ; x_2$

thỏa mãn

$$x^2 - 2mx = 9$$

m để
phương
trình
có hai
nghiệ
m
phân
biệt

Lời giải

1) Với $m = 1$

phương
trình đã
cho trở
thành:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$S = \{1\}.$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình
là

2) Phương trình đã cho có hai
nghiệm phân biệt

$x_1 ; x_2$

$$1 \quad 2$$

$$\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

$$|1 \neq 0$$

$$\begin{cases} m^2 - (m^2 - m + 1) > 0 \end{cases}$$

□

l ||

Theo đề bài ta có:

$$x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$$

Vì x là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ nên

$$x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$$

$$\text{Suy ra } 9 + m^2 - m + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 10 = 0$$

Phương trình $(*)$ vô nghiệm.

có $\Delta = 1^2 - 4.1.10 = -39 < 0$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy không tìm được giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

1 2

$$\text{thỏa mãn } x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 9$$



Câu 5. Cho phương trình: nghiệm

$x^2 - 2(m+1)x + 2m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai

$x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng

L
ờ
i
g
i
ả
i

Vì $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh tam giác nên $x_1; x_2$ là hai nghiệm dương.

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương

$$\left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \neq 0 \\ m^2 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta' \geq 0 \\ (m+1) - (2m+1) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \geq -1 \\ m > -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m > -1 \\ m > -1 \end{array} \right.$$

$$0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m > -1 \\ m > -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m > -1 \\ m > -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m > -\frac{1}{2} \\ m > -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m > -\frac{1}{2} \\ m > -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -b = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = c = 2m+1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = a \\ x_1 x_2 = c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = a \\ x_1 x_2 = c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = a \\ x_1 x_2 = c \end{array} \right.$$

Theo đề bài ta có:

$$x^2 + x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(2m+1) = 5$$

$$n^2 + 8m + 4 - 4m - 2 - 5 = 0$$

$$n^2 + 4m - 3 = 0$$

$$\begin{cases} m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = - \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m = 1$

là giá trị cần tìm

2

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + 2$ và parabol $(P): y = x^2$

1) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P) .

2) Tính chu vi và diện tích tam giác AOB .

Câu 7. Cho $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 4$

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = -2$

2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m .

3) Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) $y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2$.

**Lời
giải**

1) ***Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = -2$***

Thay $m = -2$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có: y

$$= (-2 - 1)x + 4 \Rightarrow y = -3x + 4$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = -3x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\text{Ta có: } a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1^2 = 1$$

$$x_2 = -4 \Rightarrow y_2 = (-4)^2 = 16$$

Vậy với $m = -2$ thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $(-1; 1)$ và $(-4; 16)$.

2) ***Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m .***

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = (m-1)x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - 4 = 0$$

$$\Delta = [-(m-1)]^2 - 4.1.(-4) = (m-1)^2 + 16 >$$

$$0 \forall m.$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân

biệt $\forall m$

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân

biệt với mọi m .

3) Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

là tọa độ giao điểm của
(d) và (P)

$$y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2.$$

Vì (d) luôn cắt (P) $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

với mọi m .

tại 2 điểm phân

biệt Theo hệ thức

Viết ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2 \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2 \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 = x^2 \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2.(-4) = (-4)^2$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 16 - 8$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 8$$

✓

$$m = 2 + 1$$

2

+1 là giá trị cần tìm.

$$m = -2$$

$$+1; m = -2$$

✓

$$\text{Vậy } m = 2$$

✓

Câu 8.

Cho đường thẳng (d) : $y = 2x + m^2 - 1$ và (P) :

$$y = x^2$$

1) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A; B$.

2) Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.

Lời giải

$A; B$.

1) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Vậy $m \neq 0$ là giá trị cần tìm.

**2) Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành.
 Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.**

Vì $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành

$$\Rightarrow x_H = x_A; x_K = x_B$$

$$\Rightarrow HK = x_H - x_K = x_A - x_B$$

$$\text{Mà } HK = 3 \Rightarrow x_A - x_B = 3$$

Với $x_A; x_B$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*)

Theo hệ thức Vi ét ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A x_B = -m^2 + 1 \end{cases}$$

$$x_A - x_B$$

$$x_A - x_B = 3 \Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B = 9$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - 4(-m^2 + 1) = 9$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m^2 - 4 = 9$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{3}{2} \text{ (TM)}$$

Đề (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A; B

là giá trị cần tìm.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1^2 + x_2^2 + 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 = 0$

Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$1) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$



$$x + y = 3$$

$$x + y^3 = 5$$

$$2) \begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 7 \\ 5(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$3$$

$$(x$$

$$+1$$

$$)$$

$$+$$

$$2($$

$$x +$$

$$2y$$

$$)$$

$$=$$

$$4$$

$$4) \begin{cases} 4(x + 1) - (x + 2y) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2y - 2 = 6 \end{cases}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

$$(x - 3)(y + 2) = xy - 5$$

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (x + 2)(y - 3) = xy + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{5} = \frac{4}{x} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3 - x + 2 = 5 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

$$3$$

$$\begin{cases} 5 = 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

$$3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3 - x} = 15$$

$$\begin{cases} x - 7 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

Lời giải

$$1) \begin{cases} x = 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 3x = 6y \end{cases}$$

$$\bullet 15 \begin{cases} 7y \end{cases}$$

$$\bullet 14$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y} \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{3x-y-1}{1} = \frac{3x-y-1}{3x-y-1} \Rightarrow \frac{3x-2-1}{3x-y-1}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1; 2)$

ĐKXD: $x \neq -2$

$$2) \quad \frac{1}{x-y}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 7 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 7 \Rightarrow x+y = 7xy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 14 \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = 14 \Rightarrow y-x = 14xy \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 9 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 9 \Rightarrow x+y = 9xy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 18 \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = 18 \Rightarrow y-x = 18xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 7 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 7 \Rightarrow x+y = 7xy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 14 \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = 14 \Rightarrow y-x = 14xy \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 9 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 9 \Rightarrow x+y = 9xy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 18 \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = 18 \Rightarrow y-x = 18xy \end{aligned}$$

$$7 \frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}$$



$$y = -5$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (7; -5)$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$$

$$3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 - 2xy = 5$$

Đặt $\begin{cases} x = S \\ y = P \end{cases}$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = P \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 3 \\ S = 3 \\ S = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 3 \\ S = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$3 - y$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ 3 - y = y \\ -y^2 = 2 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \\ 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$



$$x \cdot 1$$



Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (1; -1)$

$$5) \quad x^3 - 2 = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{ĐKXD: } x \geq 3$$

⇒



$$x^3 - 2 = \sqrt{x^2 - 3} \quad | \quad x^3 - 2 \geq 0 \quad | \quad x \geq \sqrt[3]{2}$$

$$1 \geq y \quad | \quad y \geq -1 \quad | \quad x \geq 1 \quad | \quad m$$

$$2 \quad | \quad 4 \quad | \quad 2 \geq y \geq -1 \quad | \quad t/m$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1; -1)$

$$\frac{4}{9} - 1$$

$$\frac{1}{2}$$

6) $\frac{2x-1}{y-1}$

Điều kiện: $x \neq 2$

$$\frac{3}{4} - 13$$

$$\frac{y}{1}$$

$$\frac{2x-1}{2y-2} - 6$$

$$\frac{4}{9} - 1$$

$$\frac{2x-1}{y-1}$$

(1)

$$\frac{3}{2} - 13$$

$$\frac{2x-1}{y-1} - 6$$

Đặt $a = \frac{1}{y-1}$; $b =$

$$\frac{1}{y-1} \quad a, b \neq 0 \quad (2).$$

$$2x-1$$

$$\frac{4a-9b}{8a-18b} - 2$$

$$\frac{35}{35a}$$

(1) $\frac{13}{27a-18b}$

$$\frac{39}{2}$$

$$\frac{3a-2b}{13}$$

13

$$\frac{6}{6}$$

$$\frac{2}{3a-2b}$$

$$\frac{6}{6}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = 1, y = 1$

$$\Theta 2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$(1)$$

$\geq$ 17 $\geq$ 17
 $\geq$ 5 $\geq y \bullet \text{---}$
 $\geq$ $\geq y \bullet \text{---}$
 $\geq$ 23 $x; y$ 17 23
 $\geq x \bullet \text{---}$
 $\geq$ 5
 $\geq x$
 $\geq$ 5
 $\geq$ 17
 $\geq$ 5

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

● —

$\ominus$

9) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Đặt

$$;b \bullet^1$$

























 6

t / m

3

t / m

 6

$$\hat{= } \quad x \bullet 10^{t/m}$$

🎓  $x - 7 \bullet 3$

$$y \bullet 30 \text{ t / m}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x = 10; y = 30$; $x = 4; y = 30$.

$$\begin{cases} xy - 3x + 2y - 6 = xy + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ -6x + 4y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 4y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

(1). Điều kiện: $y \neq 2$

3

$$3 - x$$



10)

≧

$$\geq 4 - 3 - x - \frac{1}{15} \leq 15$$



Đặt $a = 3 - x; b = 1$ $a, b \in \mathbb{Z}$ (2)

$$\frac{1}{15}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 20 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\geq a$$

$$2b$$

$$\bullet$$

$$5$$



$$\frac{\text{factory}}{\text{grad}} \bullet x \bullet 2t/m$$

$$\approx x \bullet 4t/m$$

19 t / m

9

19   

9   

$$\text{là: } x, y \bullet$$



0

1) Giải hệ phương trình với $a = -2$

2) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

3) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho x nhận giá trị nguyên.

L
ờ
i
g
i
ả
i

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - 2y = a \\ -2x + y = a + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2x + y = a + 1 \end{cases} \quad (2)$$

1) Giải hệ phương trình với $a = -2$.

Với $a = -2$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy với $a = -2$

hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x; y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

()

| |

2) **Tìm a để hệ phương trình có** $x - y = 1.$

**nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều
kiện**

PT (2) $\Leftrightarrow y = a + 1 + 2x$ thay vào
phương trình (1) ta được:

$$ax - 2(a + 1 + 2x) = a \Leftrightarrow ax - 2a - 2 -$$

$$4x = a \Leftrightarrow (a - 4)x = 3a + 2$$

(3)

TH1: Nếu $a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$

PT (3) $\Leftrightarrow 0x = 14$ (phương trình vô nghiệm)

TH2: Nếu $a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4$

có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{3a + 2}{a - 4}$$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = 3a + 2 \\ y = a - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 4 \\ 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(3a + 2) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 4 \\ a^2 - 4a + a - 4 + 6a + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 4 \\ a^2 + 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 4 \\ y = \end{cases}$$

$$x - y = 1$$

||

$$a - 4$$

$$\begin{cases} a - 4 \\ y = \end{cases}$$

||

...

$$\Rightarrow \frac{3a + 2}{a - 4} - \frac{a^2 + 3a}{a - 4} = 1 \Rightarrow \frac{3a + 2 - a^2 - 3a}{a - 4} = 1$$

$$-a^2 + 2$$

$$\Rightarrow = 1$$

$$a - 4$$

$$\Rightarrow -a^2 + 2 = a - 4$$

(thỏa mãn điều kiện)

$$\Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 3) = 0$$

$$0 \Rightarrow a = 2$$

|

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

□

thì hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) thỏa mãn điều kiện

$$x - y = 1.$$

3) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm (x, y) sao cho x nhận giá trị nguyên.

$$\begin{aligned} &\text{Với } a \neq 4 \text{ thì hệ phương trình} \\ &\text{đã cho có nghiệm duy nhất} \\ &\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3a + 2}{a - 4} \\ y &= \frac{a^2 + 3a}{a - 4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Theo bài ra, $x \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Mà: } x = \frac{3a + 2}{a - 4} = 3 + \frac{14}{a - 4}$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì

$$a - 4 \in 7(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}.$$

bảng sau:

$\cdot 4$	-14	-7	-2	-1	1	2	7	14
a	-10	-3	2	3	5	7	11	18
	Thỏ a mãn	Thỏ mãn	Thỏ mãn	Thỏ o mãn	Thỏ mãn	Thỏ mãn	Thỏ o mãn	Thỏ mãn

Vậy $a \in \{-10; -3; 2; 3; 5; 7; 11; 18\}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm sao cho x nhận giá trị nguyên

DẠNG 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 9. Hai người làm chung một công việc sau 6 giờ thì xong. Nếu làm một mình, người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong công việc?

Lời giải

Đời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là: x, y (giờ, $x, y > 6$).

Cả hai cùng làm xong công việc trong 6 giờ.

Trong 1 giờ:

+ Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

+ Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

+ Cả hai cùng làm được $\frac{1}{6}$ công việc.

Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 2 giờ được $\frac{2}{x}$ công việc.

Người thứ hai làm trong 3 giờ được $\frac{3}{y}$ công việc.

y

Cả hai làm được $\frac{1}{2}$ công việc nên ta (2)

có phương trình: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \end{cases} \quad (t/m)$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 10$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow y = 15$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{15}$$

Vậy thời gian người thứ nhất, người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là 10 giờ và 15 giờ.

Câu 10. Hai đội công nhân cùng tu sửa một đoạn đường trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu mỗi đội làm một mình thì đội I cần ít hơn thời gian đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội cần bao lâu xong công việc?

Lời giải

Thời gian đội I làm một mình xong công việc là x (ngày, $x \geq 6$).

Thời gian đội II làm một mình xong công việc là $x + 6$ ngày.

Thời gian hai đội cùng làm xong công việc là 4 ngày.

Trong một ngày:

+ Đội I làm được $\frac{1}{x}$ công việc

+ Đội II làm được $\frac{1}{x+6}$ công việc

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$ công việc nên ta có phương trình:

+ Cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ (t/m)} \\ x = -4 \text{ (l)} \end{cases}$$

Vậy thời gian đội I, đội II làm một mình xong công việc lần lượt là 6 giờ và 12 giờ.

Câu 11. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian quy định. Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến sớm hơn quy định 2 giờ. Nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến chậm hơn quy định 3 giờ. Tính quãng đường.

Lời

giải Gọi vận tốc dự định đi là x (km/h), ($x >$

10). Thời gian dự định đi là y (h), ($y > 2$).

Vì nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến B sớm hơn quy định 2 giờ nên quãng đường AB là:

(1).

$$(x+10)(y-2) = xy$$

Vì nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến B chậm hơn quy định 3 giờ nên quãng đường AB là:

$$(x-10)(y+3) = xy$$

Vậy ta có hệ:

(2).

$$\begin{cases} (x+10)(y-2) = xy \\ (x-10)(y+3) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10y = 20 \\ 3x - 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\begin{cases} (x+10)(y-2) = xy \\ (x-10)(y+3) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10y = 20 \\ 3x - 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 12 \end{cases}$$

Vậy quãng đường $AB = 600$ km.

Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Lời giải

Gọi vận tốc xe của cô Liên là x (km/h), ($x > 0$).

Ta có vận tốc xe của bác Hiệp là $x + 3$ (km/h).

Thời gian cô Liên đi là $\frac{30}{x}$ (h).

Thời gian bác Hiệp đi là $\frac{30}{x+3}$ (h).

Vì bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 60(x+3) - 60x = x(x+3) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-12)(x+15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (Tm)} \\ x = -15 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

|

Vậy vận tốc xe của cô Liên là 12 km/h, vận tốc xe của bác Hiệp là 15 km/h.

Câu 13. Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng được chia thành bao nhiêu dãy.

Lời giải

Gọi số dãy ban đầu trong phòng là x (dãy), ($x \in \mathbb{N}^*$, $x > 3$).

Ta có số chỗ ngồi trong mỗi dãy ban đầu (chỗ).

đầu là 360

x

Vì nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi nên ta có phương trình:

$$\left(\begin{array}{c} 360 \\ + 4 \end{array} \right) (x - 3) = 360 \Leftrightarrow (360 + 4x)(x - 3) = 360x \Leftrightarrow 360x - 1080 + 4x^2 - 12x = 360x$$

$$\left| \begin{array}{c} x \\ \end{array} \right|$$

$$\left(\begin{array}{c} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 270 = 0 \Leftrightarrow (x - 18)(x + 15) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x = 18 \text{ (Tm)} \\ x = -15 \end{array} \right|$$

|

Vậy ban đầu phòng được chia thành 18 dãy.

trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Lời giải

Gọi số học sinh dự thi trường A x (em), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh dự thi trường B y (em), ($y \in \mathbb{N}^*$).

Ta có:

Số học sinh trường A đỗ là $80\%x$ (em), số học sinh trường B thi đỗ là $90\%y$ (em).

Vì hai trường có 420 học sinh thi đỗ nên ta có phương trình:

$$80\%x + 90\%y = 420 \Leftrightarrow 8x + 9y = 4200 \quad (1).$$

Vì tỉ lệ đỗ là 84% nên ta có phương trình:

$$84\% (x + y) = 420 \Leftrightarrow x + y = 500 \quad (2).$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} 8x + 9y = 4200 \\ 8x + 9y = 4200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 4200 \\ 8x + 9y = 4200 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 \\ 8x + 9y = 4200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ x + 8y = 4000 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 500 \\ x + 8y = 4000 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 500 \\ x = 300 \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y = 500 \\ x + 8y = 4000 \end{cases} \xrightarrow{8}$

Vậy trường A có 300 học sinh dự thi, trường B có 200 học sinh dự thi.

Câu 15. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ I được giao theo kế hoạch là x (sản phẩm), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có số sản phẩm được giao theo kế hoạch của tổ II là $600 - x$ (sản phẩm).

Vì do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%, mà thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm nên ta có phương

trình:

$$18\%x + 21\% (600 - x) = 120 \Leftrightarrow 0,18x + 126 - 0,21x = 120 \Leftrightarrow 0,03x = 6 \Leftrightarrow x = 200 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy số sản phẩm tổ I được giao theo kế hoạch là 200 sản phẩm, số sản phẩm tổ II được giao theo kế hoạch là 400 sản phẩm.

Câu 16. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm $36cm^2$, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi $26cm^2$.

Lời giải

a, b (cm) lần lượt là độ dài hai cạnh của tam giác vuông đã cho. ($a, b > 0$).

Vì rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm 36cm^2 nên ta có phương trình:

(1)

$$(a + 3)(b + 3) = ab + 36$$

Vì nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26cm^2 nên ta có phương trình :

$$(a - 2)(b - 4) = ab - 26 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (a + 3)(b + 3) = ab + 36 \\ (a - 2)(b - 4) = ab - 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 27 \\ a - 2b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$ab + 36$$

$$\begin{cases} (a - 2)(b - 4) = \\ ab - 26 \end{cases}$$

$$ab - 26$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho là 8 cm và 1 cm.

HÌNH HỌC

M, N lần lượt

Câu 1. Cho đường tròn đường kính AB và điểm C thuộc (O) . Gọi

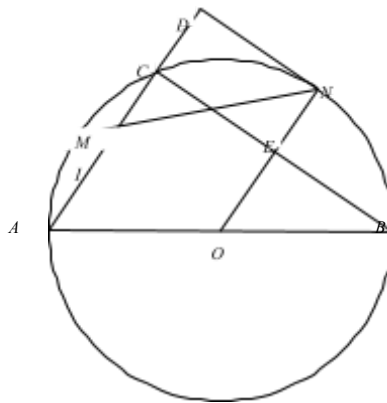
là điểm chính giữa các cung nhỏ là AC, CB . Nối $MN \cap AC = I$. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E trung điểm BC .

1. Tính M''_{IC} .

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O; R)$.

3. Dựng hình bình hành $ADEF$. CMR : F thuộc đường tròn $(O; R)$.

4. Cho $R = 10$ cm. Tính V hình tạo bởi ΔABC quay một vòng quanh trục AB thành khi $\angle C = 30^\circ$.



[nh

om

$$\text{có } M \square IC_2 \square \perp \square_{sd} M \square C \square \square_{sd} A \square N \square \square \square \perp_{sd} M \square N$$

(cung lớn MN).

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O; R)$.

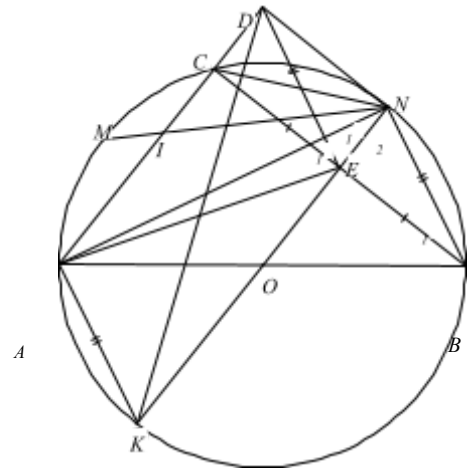
Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên $ON \perp CB$ (mối quan hệ giữa đường kính và dây cung).

Mà $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $AC \perp CB$

Do đó $AD \parallel ON$

Lại có $AD \perp DN$ (gt) suy ra $DN \perp NO$.

Vậy DN là tiếp tuyến với $(O; R)$.



3. CMR : F thuộc đường tròn $(O; R)$.

Gọi $K = NO \cap (O)$ Ta có $BC \perp AC$, suy ra $AC \parallel NK$ hay $AC \parallel EK$ (1)
 $BC \perp NK$

Tứ giác $NDCE$ có :

$\angle D = \angle C = \angle E = 90^\circ$ nên $NDCE$ là hình chữ nhật, suy

ra $DN = CE$

mà $CE = EB$ (gt) nên $DN = EB$, lại có

$ND \parallel BE$ ($\perp AC$)

Suy ra $DNBE$ là hình bình hành.

$DE \parallel NB$ suy ra $\angle E = \angle B$
 nên

(cặp góc đồng vị) $\angle N + \angle E = 90^\circ$ suy
 $\angle B + \angle N = 90^\circ$, ra

$$\angle N = \angle B = \angle E$$

Lại có $\angle N + \angle K = 90^\circ$,

$$\angle E + \angle EN = 90^\circ$$

Nên $\widehat{KA} = \widehat{EN}$, do là cặp góc đồng vị suy ra $DE \parallel AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ADEK$ là hình bình hành, mà $ADEF$ là hình bình hành nên $F \equiv K$.

Chứng tỏ F thuộc (O) .

4. Tính thể tích hình ΔABC tạo thành khi

quay một vòng quanh AB .

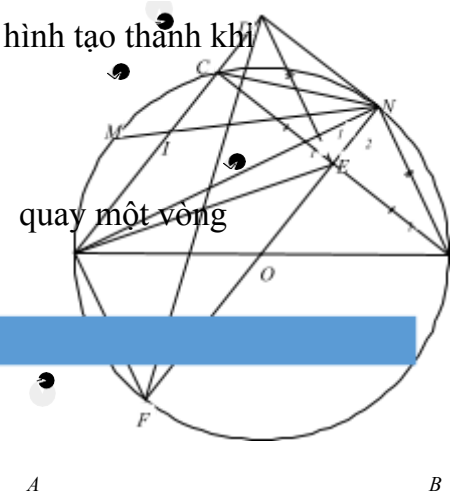
Cho $\widehat{C} = 30^\circ$,

$R = 10$ cm. Tính thể tích tạo thành khi

ΔABC quay một vòng quanh AB .

Kẻ $CH \perp AB = H$. ΔABC

Vậy khi



facebook.com/groups/tailieutoanthes

TÀI LIỆU TOÁN HỌC

quanh AB sẽ tạo cho ta hai hình nón như sau :

Hình nón thứ nhất (tạo thành khi quay ΔAHC quanh AH) có đường cao là AH , bán kính đáy là CH .

$\sqrt{}$

$$= 20 \cdot \cos 30^\circ = 10\sqrt{3}$$

(

$\frac{1}{3}$

)

$\frac{1}{3}$

Do $\Delta ABC : C = 90^\circ$ nên

$CH \perp AB$ tại H

nên

$$\frac{CH}{AB} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow CH = \sqrt{AH \cdot AB} = \sqrt{15 \cdot 20} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

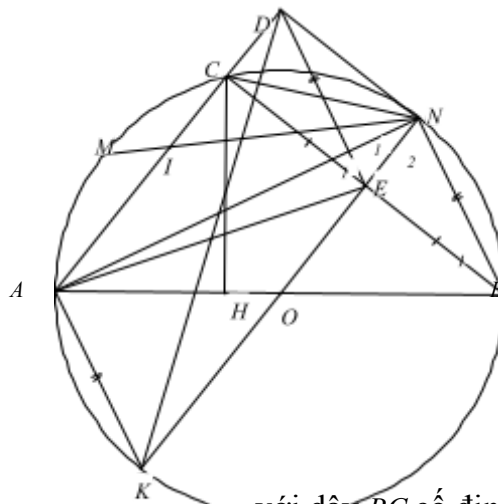
$$HB = AB - AH = 20 - 15 = 5 \text{ (cm)}$$

$\sqrt{}$

$$CH = \sqrt{AH \cdot AB} = \sqrt{15 \cdot 20} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Vậy thể tích hình thu được sẽ là:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot CH^2 \cdot AH + \frac{1}{3} \pi \cdot CH^2 \cdot BH = \frac{1}{3} \pi \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \pi \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 1570 \pi \text{ (cm}^3 \text{)}.$$



với dây BC cố định. Điểm A thuộc cung lớn BC . Đường

Câu 2 Cho đường tròn $(O; R)$

phân
giác của

$\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O)

tại D . Các tiếp tuyến của $(O; R)$ tại C và

√

D cắt nhau ở E . Tia CD cắt AB ở K , đường thẳng AD cắt CE tại I .
 Hình nón thứ hai (tạo thành khi quay $\triangle BHC$ quanh BH) có đường cao là BH ,
 1) Chứng minh $BC \parallel DE$.
 bán kính đáy là CH .

2) Chứng minh $\triangle AKC$ là tứ giác nội tiếp. $\angle C = 60^\circ$, $AC = 20$ (cm), vậy $AB = AC \cdot \cos C = 10$

3) Cho $BC = F$. Tính độ dài cung nhỏ BC của đường tròn (O ;

R)

D cắt BC tại M . Chứng minh $AB \cdot AC = AM^2 + MB \cdot MC$.

Lời giải

1) Chứng minh $BC \parallel DE$.

Ta có: $\widehat{B}CD = \widehat{BAD}$ (hai $\widehat{B}D$); $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD là phân
góc nội tiếp cùng
chắn

giác $\widehat{BAC}$); $\widehat{CAD} = \widehat{CED}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp
tuyến và dây cung

cùng chắn $\widehat{CD}$) mà hai góc này ở vị trí so le trong $BC \parallel DE$.

$\Rightarrow \widehat{BCD} =$ nên

$\widehat{CED}$

2) Chứng minh $AKIC$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{DCE} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp
tuyến và dây cung cùng

chắn $\widehat{CD}$); $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$);

√

A, C cùng nhìn cạnh KI

$\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{BAD} (= \widehat{DAC}) \Rightarrow$

Tứ giác $AKIC$ có hai đỉnh dưới góc
bằng nhau nên là tứ giác nội tiếp.

3) Cho $BC = R$

. Tính độ dài cung nhỏ BC theo R .

BC của đường tròn $(O;$

$R)$

Vì $\widehat{BAC} \Rightarrow D$ là điểm chính giữa của $\widehat{BAC} \Rightarrow OD \perp BC$ tại D là phân giác của

trung điểm H của BC (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$$\Rightarrow HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{R}{3}.$$

$$\frac{2}{2}$$

Trong tam giác OHC vuông tại H có $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} \Rightarrow \widehat{HOC} = 60^\circ$.

$$\sin \widehat{HOC} = \frac{HC}{OC} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Lại có $\triangle OBC$

cân tại O có OH là đường cao nên cũng là phân giác

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{HOC} = 2.60^\circ = 120^\circ$ nên độ dài cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$ là: (đơn vị độ dài).

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = \frac{2\pi R}{3}$$

4) AD cắt BC tại M . Chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$.

Xét $\triangle ABM$

và $\triangle ADC$

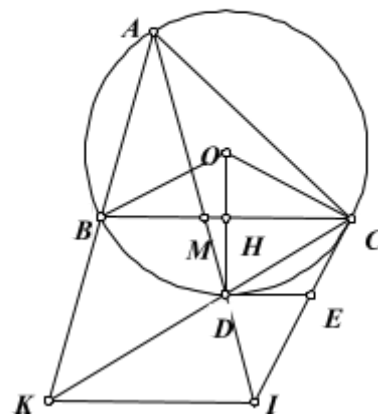
có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \quad (\text{AD là phân giác của } \widehat{BAC}); \quad \widehat{ABM} = \widehat{ACD} \quad (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{ADC})$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{ACD} \quad (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{ADC})$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ADC \quad (g.g) \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow AB.AC = AM^2 + MB.MC \quad (1).$$



Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCD$ có:

$\angle AMB = \angle CMD$ (đối đỉnh); $\angle MAB = \angle MCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $B\hat{D}$)
(2).

$$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{MB}{MD}$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot MD = MB \cdot MC$$

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$AB \cdot AC = AM \cdot AD = AM (AM + MD) = AM^2 + AM \cdot MD = AM^2 + MB \cdot MC.$$

$$\text{Vậy } AB \cdot AC = AM^2 + MB \cdot MC.$$

Câu 3. Cho $(O; R)$
tiếp tuyến

và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD .
Qua M kẻ hai

MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I
là trung điểm

D . Nối BI cắt (O) tại E ($E \neq B$). Nối OM cắt AB tại H .

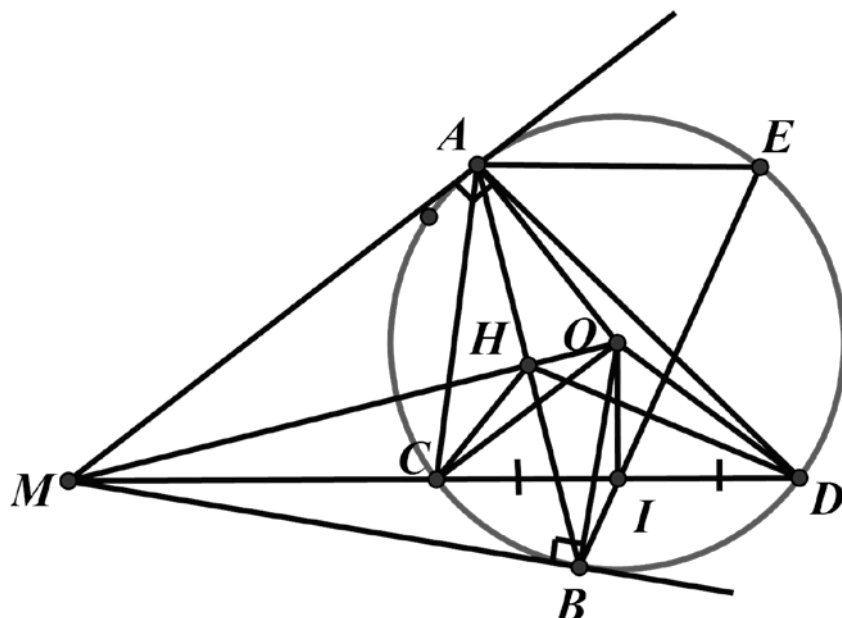
Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

→, chứng minh $AE \parallel CD$.

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

4) Chứng minh HD là phân giác của $\angle AHB$.

Lời giải



1) Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

Vì MA, MB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MA \perp AO$ và $MB \perp BO \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow 2$ đỉnh $A, B \in$ đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ nội tiếp $\Rightarrow 4$ điểm $M, A, O, B \in$ đường tròn đường kính MO (1)

(O) có CD là dây cung, OI là một phần đường kính và $IC \perp ID$ (gt)
 $I \in CD$

$\Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MIO$ vuông tại $I \Rightarrow I \in$ đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow 5$ điểm $M, A, O, B, I \in$ đường tròn đường kính MO .

2) Chứng minh $AE \parallel CD$.

Xét (O) có $\widehat{AEB} = \widehat{MAB}$ (Hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Xét đường tròn đường kính MO có $\widehat{MAB} = \widehat{MIB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{MIB} \Rightarrow AE \parallel CD$

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

$MA \perp MB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ là hình chữ

Mà $OA = OB = R \Rightarrow AMBO$ là hình vuông $\Rightarrow OM$ là phân giác của

$\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = 45^\circ$

Xét ΔMAO vuông tại A có $\cos \widehat{AOM} = \cos 45^\circ = \frac{OA}{OM} \Rightarrow OM = \frac{OA}{\cos 45^\circ} = \frac{R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}R$.

$OA =$

OM

Vậy $OM = \sqrt{2}R$ thì $MA \perp MB$

4) Chứng minh HD là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Có MA, MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow M \in$ đường trung trực của AB

Có $OA = OB = R \Rightarrow O \in$ đường trung trực của AB

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại H

Xét $\triangle MAO$

vuông tại A đường cao AH $MA^2 = MH \cdot MO$ (4)
có:

Xét $\triangle MAC$

và $\triangle MDA$ CÓ

$\widehat{A} \widehat{MC}$ chung

$\widehat{M} \widehat{AC} = \widehat{M} \widehat{DB}$ (hệ quả của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$\Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$ (3)

Từ (3); (4) $\Rightarrow MH \cdot MO = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$

$$\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$$

$\square MHC$ và $\square MDO$

-- MC chung

(chứng minh trên)

$$MH = MD$$

$$MC = MO$$

$$\Rightarrow \triangle MHC \cong \triangle MDO \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{CDO} \Rightarrow CHOD \text{ nội tiếp } \widehat{OHD} = \widehat{OCD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{C'D} \text{)}$$

$$\text{Mà } \widehat{OCD} = \widehat{ODC} \text{ (} \triangle OCD \text{ cân tại } O, OC = OD = R \text{) } \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{OHD}$$

Lại có

$$\widehat{MHC} + \widehat{CHB} = \widehat{OHD} + \widehat{DHB} = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\widehat{CHB} = \widehat{DHB}$$

$$\Rightarrow HB$$

là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A và B). Vẽ cùng nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và Bx cùng vuông góc với AB . Trên tia

Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM$ tại C , tia Cz cắt tia Bx tại K . Vẽ đường tròn tâm O , đường kính MC cắt MK tại E .

1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AM \cdot BK = AC \cdot BC$.

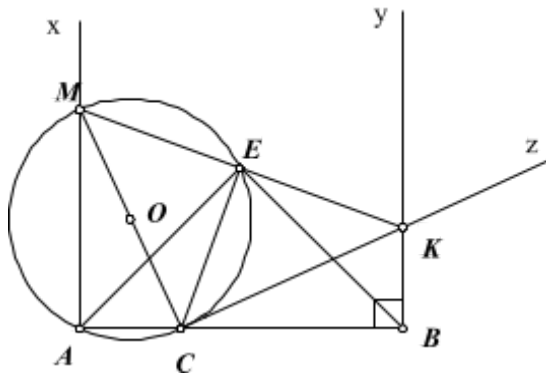
3) Chứng minh $\triangle AEB$

là tam giác vuông.

4) Cho nhất.

A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn

L
ờ
i
g
i
ả
i



1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $CEKB$ có: $\widehat{C}BK = 90^\circ$ (GT); $\widehat{CEM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CEK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{CEM} = 90^\circ$) $\Rightarrow$ tứ giác $CEKB$ nội tiếp đường tròn đường kính CK .

hướng minh $AM \cdot BK \perp AC$.

... $\triangle AMC$ và $\triangle BCK$ có:

$$\widehat{M}AC = \widehat{A}MC = \widehat{B}CK \quad (\text{cùng phụ với } \widehat{A}CM)$$

$$\widehat{C}BK =$$

$$90^\circ (GT)$$

;

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle BCK \quad (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{AC}{BK} \Leftrightarrow AM \cdot BK = AC \cdot BC.$$

3) Chứng minh $\triangle AEB$ là tam giác vuông.

Ta có $\widehat{C}AE =$ (hai góc nội tiếp cùng chắn (hai góc $\widehat{C}E$);

$\widehat{C}ME$ nội tiếp cùng chắn $\widehat{C}E$);

Ta có $\widehat{C}BE =$

$\widehat{C}KE$

$$\Rightarrow \widehat{C}AE + \widehat{C}BE = \widehat{C}ME + \widehat{C}KE \quad (\text{vuông tại } C)$$

$$\widehat{C}KE = 90^\circ \quad (\triangle CMK$$

vuông tại E).

$$\Rightarrow \widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{C}AE +$$

$$\widehat{C}BE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$$

$\triangle AEB$

4) Cho nhất.

A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn

Ta có tứ giác $ABKM$ là hình thang vuông nên có diện tích là

$$S = \frac{(AM + KB) \cdot AB}{2}.$$

Vì A, B, M cố định nên S lớn nhất khi BK lớn nhất.

Lại có $AM \cdot BK = AC \cdot BC$ (ý 2)) $\Rightarrow$ nên BK lớn nhất khi $AC \cdot BC$ lớn nhất.
 $BK = \frac{AC \cdot BC}{AM}$

AM

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$AC \cdot BC \leq \frac{(AC + BC)^2}{4} = \frac{(AB)^2}{4} \quad \text{không đổi nên}$$

$$(AB)^2$$

$AC \cdot BC$ lớn nhất bằng $\frac{(AB)^2}{4}$ khi $AC = BC$ tức là C là trung điểm của AB .

Vậy diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất khi C là trung điểm của AB .

Câu 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R = 2R'$). Điểm

B thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của

đường tròn $(O; R)$ sao cho $MA \leq MB$. Nối MA cắt $(O'; R')$ tại N . Từ N kẻ

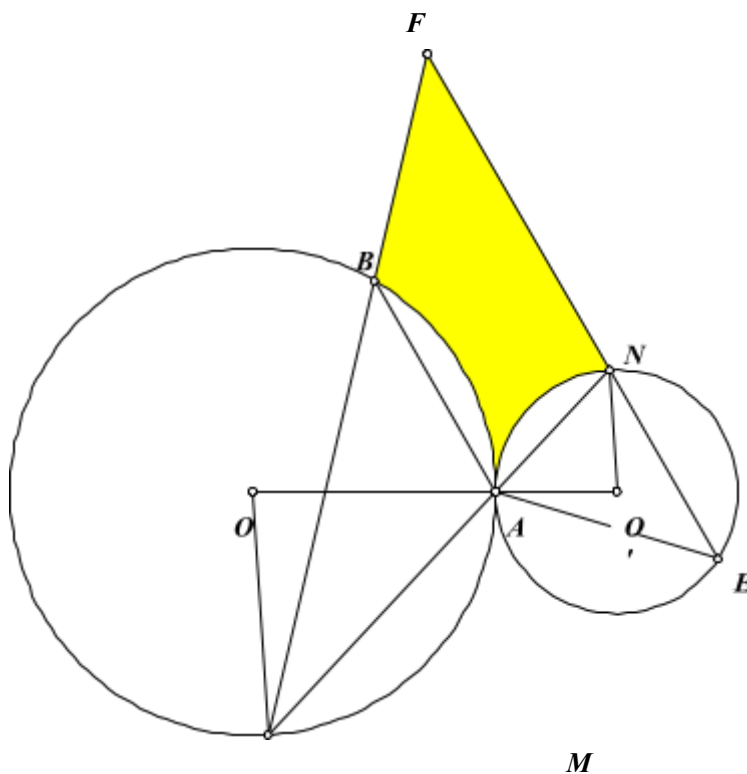
đường thẳng song song với AB cắt $(O'; R')$ tại E , cắt MB tại F .

1) Chứng minh $\Delta AOM \sim \Delta AO'N$.

hứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên
; lớn AB của $\square O; R$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.



Lời giải

1) Chứng minh $\triangle AOM$

$\triangle AO'N$.

Xét $\triangle AOM$

và $\triangle AO'N$

có:

$$OA = OM = R; O'A = O'N = R'; R = 2R' (GT) \Rightarrow OA = OM = 2R' = 2R';$$

$$O'A = O'M = R'$$

$\triangle AOM$ (đối đỉnh), mà các
 $\triangle AOM$
 $\triangle AO'N$

và $\triangle AO'N$ là các tam
giác cân nên:

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - \widehat{OAM} = 180^\circ - \widehat{O'AN} = \widehat{AO'N}$$

$$\Rightarrow \Delta AOM \cong \Delta AO'N \text{ (c.g.c) .}$$

2) Chứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $(O; R)$.

$$\text{Vì } \Delta AO'N \text{ (ý 1)) nên } MA = OA = R \Rightarrow MA = R .$$

$$\Delta AO$$

$$M$$

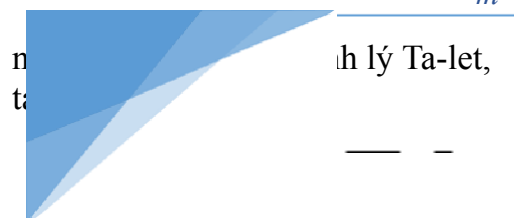
$$AN = O'A = MN = R$$

Mặt khác

$$AB \parallel NF \text{ (GT)}$$

$$\frac{AB}{NF} = \frac{MA}{MN} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{3AB}{2} = \frac{3R}{2}.$$

Vậy $NF = \frac{3R}{2}$



không đổi khi M chuyển động trên
cung lớn AB của $(O; R)$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

Vì $AB \parallel EF$ (GT) nên ta có tứ giác $ABFE$ là hình thang.

Lại có $\angle EFB = \angle ABM$ (so le trong, $AB \parallel EF$) (1);

$\angle ABM =$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AM}$); $\angle AEF = \frac{1}{2} \angle AON$ (góc nội
tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AN}$); $\angle AOM =$ (góc ở tâm chắn $\widehat{AN}$) (2).

tiếp và
góc ở tâm
cùng chắn

$\Rightarrow$

$$\angle ABM$$

$=$

ΔAON)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{EFB} = \widehat{AEF}$

$\Rightarrow$ hình thang $ABFE$ có hai góc ở đáy bằng nhau

nên là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.

Theo GT nên trong tam giác MAB ta có $\widehat{MBA} \leq \widehat{MAB}$

(góc đối diện

$\leq MB$

với cạnh nhỏ hơn thì nhỏ hơn);

Lại có $\widehat{MAB} = \widehat{MNF}$ (hai góc đồng vị, $AB \parallel EF$);

$\widehat{MBA} = \widehat{AEF}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{MNF} \geq \widehat{AEF} \Rightarrow NF \leq EF \Rightarrow$ diện tích tứ giác $ABFN$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng diện tích tứ giác $ABFE$.

Vậy diện tích tứ giác $ABFN$ là lớn nhất khi nó bằng diện tích tứ giác $ABFE$ hay

$\widehat{MNF} = \widehat{AEF} \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M hay $MA = MB \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của AB .

$\widehat{AEF}$

Vậy M là điểm chính giữa của cung thì diện tích tứ giác $ABFN$

lớn AB của $(O; R)$

lớn nhất.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao

BE, CF cắt nhau tại H , cắt $(O; R)$ tại M và N .

1) Chứng minh

2) Chứng minh

$AFHE, BFEC$ nội tiếp.

3) Chứng minh

$$AE.AC \bullet AF.AB$$

4) Chứng minh

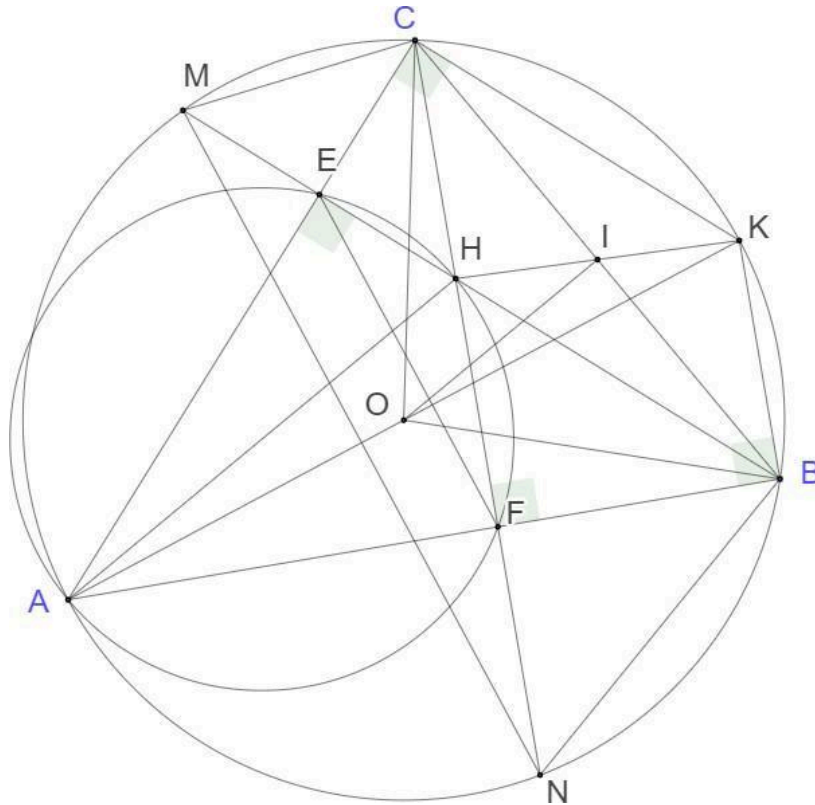
$$MN // EF$$

$$MN \perp AH$$

$$AH$$

ho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không

Lời giải



1) Chứng minh $AFHE, BFEC$ nội tiếp.

Vì $BE \perp AC$ $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$CF \perp AB \Rightarrow \angle CFA = 90^\circ$

Xét tứ giác $AFHE$ có: $\angle AEB + \angle CFA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ và $\angle AEB$ và $\angle CFA$ là hai góc

180° . Mà

ở vị trí đối nhau. Nên tứ giác $AFHE$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{CFB} + \widehat{CEB} = 90^\circ$. Mà $\widehat{CEB}$ và $\widehat{CFB}$ là hai góc ở vị trí đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CB . Nên tứ giác $CEFB$ nội tiếp.

2) **Chứng minh** $AE.AC \bullet AF.AB$

Ta có $\widehat{AEF}$ là góc ngoài tại đỉnh E của tứ giác nội tiếp $CEFB$ $\widehat{AEF} \bullet \widehat{ACB}$

Xét tam giác AEF và tam giác ABC có:

$$\widehat{AEF} \bullet \widehat{ACB}$$

$\widehat{CAB}$ chung

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC \bullet AF.AB$$

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC$$

3) Chứng minh $MN \parallel EF$

Tứ giác $CEFB$ nội tiếp nên $\angle CFE = \angle CBE$ (hai góc kề cùng nhìn cạnh CE)

$$\bullet \angle CBE$$

Xét $\triangle O$ có $\angle ONM = \angle OBE$ (góc nội tiếp chắn cung OM)

Suy ra $\angle CFE = \angle ONM$, mà hai

góc ở vị trí đồng vị nên

4) Chứng minh

$$MN \perp AH$$

Tứ giác $CEFB$ nội tiếp nên $\angle ACN = \angle ABE$ (1) (hai góc kề cùng nhìn cạnh FE)

$$\bullet \angle ABM$$

Xét $\triangle O$ có $\angle ACM = \angle ABM$ (2) (góc nội tiếp chắn cung AM)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ACN = \angle ACM$, hay AC là phân giác $\angle MCN$.

Xét tam giác MCH có CE vừa là cân
phân giác, vừa là đường cao nên

$\triangle MCH$

tại C E là trung điểm MH .

Xét $\triangle O$ có $\triangle ACN \bullet \triangle ABN$

(3) (góc nội tiếp chắn cung AN)

Từ (1) và (3) suy ra $\triangle ABN \bullet \triangle ABM$, hay AB là phân giác $\angle MBN$.

Xét tam giác MBH có BF vừa là cân
phân giác, vừa là đường cao nên

$\triangle MBH$

tại B F là trung điểm NH .

Xét tam giác NHM có:

+) E là trung điểm MH .

+) F là trung điểm NH .

EF là đường trung bình tam giác NHM $MN \bullet 2EF$

Ta lại có tứ giác $AEHF$ nội tiếp (lớn nhất)

đường tròn đường kính AH nên EF

$\triangle AH$

đường tròn, đường kính là dây cung

Suy ra $\frac{MN}{AH} = \frac{MN}{EF} \cdot 2$

Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác không đổi.

Trong đường tròn (O) , kẻ đường kính AK .

Xét (O) có: $\angle ABK = \angle ACK$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\begin{aligned} \angle ABE &= \angle KBE \\ \angle ACF &= \angle KCF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \angle ABE &= \angle KBE \quad \angle ACF = \angle KCF \quad \angle CHK \text{ là hình bình hành.} \\ \angle ACF &= \angle KCF \quad \angle CHK \text{ là hình bình hành.} \end{aligned}$$

Gọi I là giao điểm HK và CB . I là trung điểm của HK và CB .

Xét tam giác AHK có I là trung điểm HK , O là trung điểm AK nên OI là đường trung bình tam giác AHK $\Rightarrow OI \parallel AH$.

Xét tam giác cân $\triangle OI$
 OBC có I là trung
điểm BC

vừa là đường cao vừa là



$O \equiv I$

$B \bullet$

90°

phân giác

$\triangle B$

OI

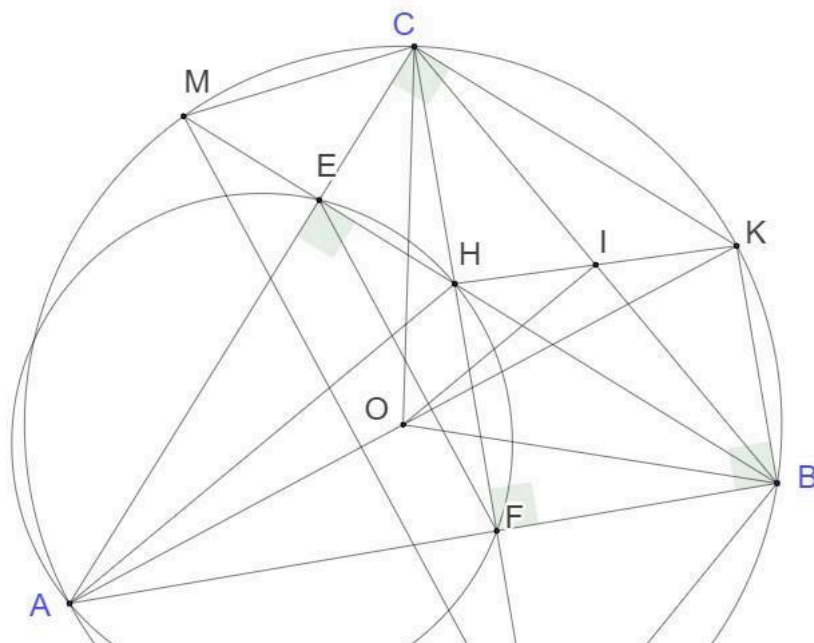
$\bullet$

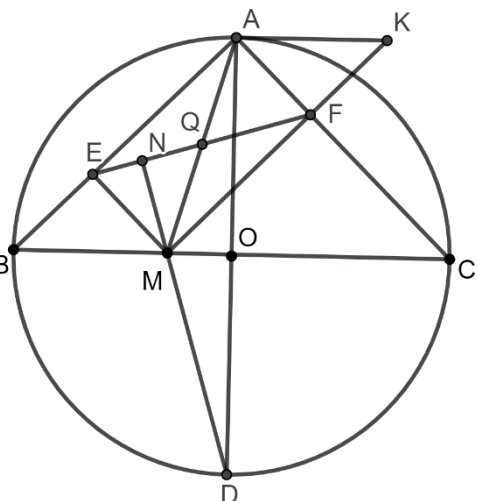
BOC

$$\triangle B \triangle AC \bullet B \triangle OI \quad \left(\bullet B \triangle OC \right)$$

2

m giác vuông BOI có: $OI \bullet BI \cdot \cot B \triangle OI \bullet BC \cdot \cot B \triangle AC$





đường tròn)

$$\widehat{MEA} = \widehat{MFA} = 90^\circ$$

Vì BC cố định nên B $\square$ AC cũng cố định.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEMF$ có:

Tứ giác $AEMF$ nội tiếp đường tròn đường kính AF

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEMF$ nội tiếp.

$\Rightarrow A, E, M, F$ cùng thuộc một đường tròn

(1)

Vì A là điểm chính giữa

$$\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } A$$

mà AO là trung tuyến của

$$\Delta ABC \Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^\circ$$

$\therefore AEMO$ có: $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AEMO$ nội tiếp

$\therefore M, O$ cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, E, M, O, F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) CM : $BE.BA = BO.BM$

Xét $\triangle BAO$ và $\triangle BME$ ta

có:

$\angle B$ chung

$$\angle M = \angle BOA = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BAO \sim \triangle BME (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BM} = \frac{BO}{BE}$$

$$\Rightarrow BE.BA = BO.BM$$

c) chứng minh:

$$BE = KF, \quad BC \perp AO \Rightarrow AK \parallel BC. \text{ Hay } AK \parallel BM$$

Vì AK là tiếp

tuyến của $(O) \Rightarrow$

$AK \perp AO$. Mà

Lại có: $\angle BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow BA \perp AC \text{ mà } MF \perp AC \Rightarrow BA \parallel MF$$

Tứ giác $AKMB$ có: $\begin{cases} BA \parallel MF \\ AK \parallel BM \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKMB$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AB = MK \quad (3)$$

$$\text{Mà } AE = MF \text{ (vì } AEMF \text{ là hình chữ nhật)} \Rightarrow AE = MF \quad (4)$$

$$\text{Lại có: } AB = AE + BE; MK = MF + KF \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4) và (5)} \Rightarrow BE = KF$$

$$\text{Cách 2: chứng minh } \triangle EBM = \triangle FAK \text{ (c.h-gn)} \Rightarrow BE = KF$$

d) Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi AO cắt (O) tại D $\Rightarrow D$ cố định .

Gọi FE cắt AM tại Q $\Rightarrow Q$ là trung điểm của FE và AM .

Vì $\widehat{EAO} = \widehat{FAO} \Rightarrow OE = FO \Rightarrow \Delta FEO$ cân tại O $\Rightarrow OQ \perp FE$

Xét ΔAMD

có QO là đường trung bình $\Rightarrow$
 $QO \parallel DM$.

Mà $OQ \perp FE$ nên

$MD \perp FE$ (6)

Mà $MN \perp FE$ (7)(gt) (gt)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow MN \equiv MD \Rightarrow M, N, D$ thẳng hàng.

$\Rightarrow MN$ đi qua điểm D cố định.

Câu 8. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Bán kính OC vuông góc với AB .

Điểm E thuộc OC . Nối AE cắt nửa đường tròn tại M . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D .

1) Chứng minh ΔDME cân.

B

đi chuyển trên OC .

Δ

E di chuyển trên

Lời giải

1) Chứng minh ΔDME

cân.

tại điểm thứ hai F , vì

 $CO \text{ cắt } (O; R)$

là điểm chính giữa C và F

$$AB \perp CO (GT) \Rightarrow A$$

$$\Rightarrow A^{\circ\circ} C = A^{\circ\circ} F \quad (1);$$

$\widehat{M}ED$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn

$$sd\ C^{\text{S}} M + sd\ AF^{\text{S}}$$

nên ta có

$$MED =$$

(góc tạo bởi tia tiếp tuyến và

$$E^{\text{MD}} = sd M^{\text{MD}} A$$

2

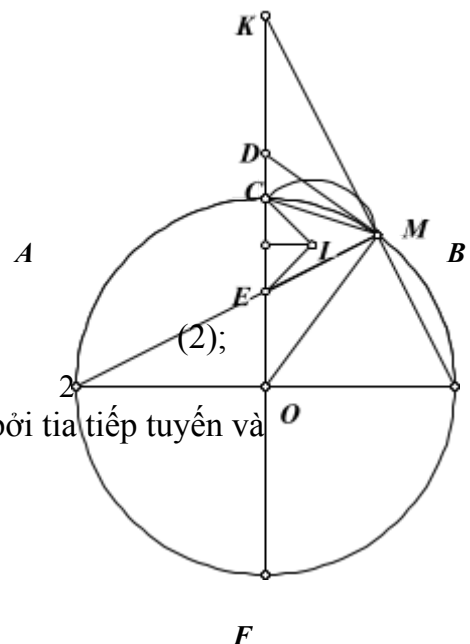
$$\text{dây cung chẵn } \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = sd A \overline{A} C^+ sd C \overline{A} M$$

MA *EMD*

(3);

Từ (1), (2), (3) ta có $\vec{ME} \cdot \vec{ED} = \vec{EM} \cdot \vec{MD} \Rightarrow \Delta DME$

cân tại D .



2) BM cắt OC tại K . Chứng minh $BM \cdot BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC .

Ta có $\triangle BMA''$

$\triangle BOK$

(hai tam giác vuông có góc nhọn B chung)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BO}{BA} \Rightarrow BM \cdot BK = BO \cdot BA = R \cdot 2R = 2R^2.$$

$BA \quad BK$

$$\text{Vậy } BM \cdot BK = 2R^2$$

không đổi khi E di chuyển trên OC .

3) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.

Ta có $\triangle AOE''$

$\triangle AMB$ (hai tam giác vuông có góc nhọn A chung)

$$\Rightarrow MA = 2MB \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2 \text{ thì}$$

$$\frac{OA}{OE} = 2$$

$$\text{mà } OA = OC = R$$

$$MA^2$$

$$MB^2$$

$$=$$

$$OA^2$$

.

Để

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

$$\frac{MA}{MB} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OE} = 2 \Leftrightarrow OC = 2OE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } OC.$$

$$OE$$

Vậy E là trung điểm của OC thì $MA = 2MB$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$. Chứng minh khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$ nên I thuộc trung trực của $CE \Rightarrow IC = IE \Rightarrow \triangle ICE$ cân tại I .

Vì $OC \perp AB \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CME} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở

tâm cùng chắn $\widehat{AC}$) $\Rightarrow \widehat{CIE} = 2\widehat{CME} = 2.45^\circ = 90^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng

chắn $\widehat{EC}$ của (I)) $\Rightarrow \triangle ICE$ vuông $I \Rightarrow \widehat{ECI} = 45^\circ$, mà CO cố định nên CI cân tại

tạo với CO góc $ICE = 45^\circ$ cố định.

Vậy khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc đường thẳng CI tạo với CO góc $ICE = 45^\circ$ cố định.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 7. Chiếc nón làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 cm, đường kính 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón.

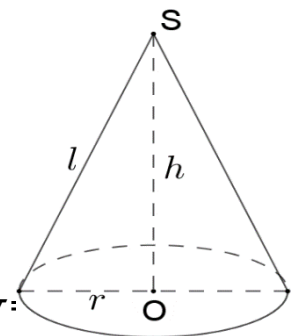
Lời giải

Với $\pi = 3,14$.

Bán kính đáy của nón là: $r = 40 : 2 = 20$ (cm).

Diện tích xung quanh của nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi . 20 . 30 = 600\pi$$



Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón

là: $1884.2 = 3768$ (cm²).

Vậy diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón là: 3768cm^2 .

Câu 8. Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, độ dài trục là 12 cm.
Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.

Lời giải

Độ dài trục là 12 cm nên $h = 12\text{cm}$.



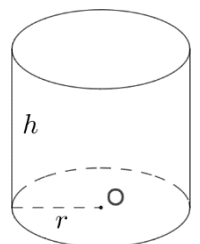
1 phần của lon nước

:

$$\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = \text{cm}^2.$$

$$5\pi \cdot 12 = 60\pi (\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó là 60π



Câu 9. Một hình trụ có đường kính đáy bằng độ dài trục, một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ nói trên. Hãy so sánh thể tích của hai hình đó.

Lời giải

Gọi bán kính của hình trụ là r .

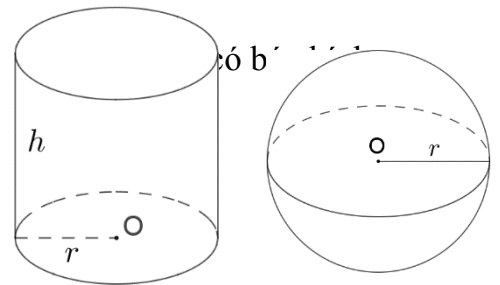
Khi đó hình trụ có: $h = 2r$
là r

Thể tích của hình trụ là: $V_t = S \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Thể tích của hình cầu là: $V_c = \frac{4}{3} \pi r^3$

Do đó: $V_t > V_c$.

Vậy thể tích hình trụ lớn hơn thể tích hình cầu.

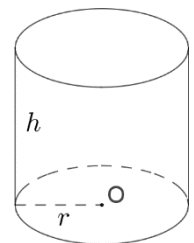


Câu 10. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Diện tích xung quanh hình trụ bằng 36π (cm²). Tính bán kính đáy hình trụ.

Lời giải

Gọi bán kính của hình trụ là r . Khi đó hình trụ có: $h = 2r$

Diện tích xung quanh hình trụ bằng 36π cm² nên:



$$2\pi r h = 36\pi \Leftrightarrow 2\pi r \cdot 2r = 36\pi \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3 \text{ (vì } r > 0 \text{)}.$$

án kính đáy của hình trụ cần tìm là 3 cm.

m căng, một quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm. Tính diện tích da
àm quả bóng nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt.

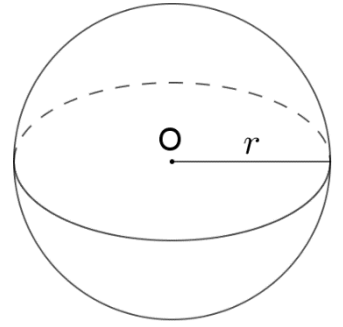
Lời giải

<http://www.webtoan.vn>

Với $\pi = 3,14$.

Quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm nên diện tích của mặt cầu là:

$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2 = \pi \cdot 24^2 = 576\pi = 1808,64 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Vậy diện tích da dùng làm quả bóng (nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt) là $1808,64 \text{ cm}^2$.

Tính diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh bằng 10 cm, đường kính đáy bằng 8

Lời giải

Vậy hình nón đó có diện tích xung quanh là $40\pi \text{ cm}^2$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Câu 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 4 + 2y^2 + 2xy + 3y = 0$.

Lời giải

Câu 2. Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

Lời giải

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 1} = 5$.

$\sqrt{\quad}$

Lời giải

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + \sqrt{8} \leq 2$. Tìm GTNN của biểu thức $K = x + 2y$.

$2y$

$y - x$

Lời giải

Câu 5. Cho x là số thực thỏa mãn $-1 \leq x \leq 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

2

$$M = x + \frac{1 - x^2}{2x^2}$$

2

Lời giải

Câu 6. Cho

$x, y \geq 0; x + y = 1$. Tìm GTNN của $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{1+x}$.
biểu thức $M =$



Hình nón có đường kính đáy bằng 8 cm nên bán kính đáy nón

cm.

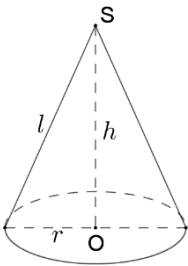
$y+1 \quad 1+x$

tích xung quanh của hình nón là:

$\pi \cdot r \cdot l$
 $\pi \cdot 40$

$\pi \cdot r^2$
cm

Lời giải



$$M + 2 = \frac{x + y + 1}{y + 1} + \frac{y + x + 1}{1 + x}$$

$$M + 2 = \left(\frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{x + y + 1} \right) \geq 2 \cdot \frac{4}{x + y + 2} = 8$$

$$M \geq 8 - 2 = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x + 1 = y + 1 \\ x = y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x = y = 1$

Câu 7. Cho $a, b > 0; a + b \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P = a^2 + b^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Lời giải

$$P = a^2 + b^2 + 1 + 1$$

$$\left(\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 15 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{2}$$

$$P = a^2 + b^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1 + 2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

$.4 =$

$$16a^2 \cdot \frac{16b^2}{y-1} - \frac{y}{1-x} = 16(a^2 + b^2) - 32(a+b) + 32 = 8$$

GTNN $P = 23$ khi $a = b = 1$

Câu 8. Cho $a, b > 0; ab + a \leq 2b$. Tìm GTLN của $P = ab$ biểu thức

Lời giải $a^2 + 2b^2$

Ta có: $2b \geq ab + 4 \geq 4$

$\sqrt{\quad} \Leftrightarrow b \geq 2 \Rightarrow b \geq 4a \Rightarrow \frac{b}{a} \geq 4$

ta lại có: $P = \frac{ab}{a^2 + 2b^2} = \frac{1}{a + 2\frac{b}{a}} = \frac{1}{a + 1} \leq \frac{1}{4}$

$\frac{b}{a} \geq 4 \Rightarrow \frac{b}{16a} \geq 1 \Rightarrow \frac{b}{16a} + 31\frac{b}{a} \geq 33$

$\frac{b}{a} = 4$ khi $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

HẾT