

LA COSTRUZIONE

L'idea consiste nel trattare separatamente i numeri dispari e i numeri pari, suddividendoli in blocchi di lunghezza crescente, e poi distribuire questi blocchi alternativamente tra A e B.

Numeri dispari:

Consideriamo la sequenza dei dispari (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...).

La dividiamo in blocchi consecutivi di lunghezza dispari crescente:

- Blocco dispari 1: (1) lunghezza 1
- Blocco dispari 2: (3, 5, 7) lunghezza 3
- Blocco dispari 3: (9, 11, 13, 15, 17) lunghezza 5
- Blocco dispari 4: (19, 21, 23, 25, 27, 29, 31) lunghezza 7
- ... e così via.

Numeri pari:

Consideriamo la sequenza dei pari (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...).

La dividiamo in blocchi consecutivi di lunghezza pari crescente:

- Blocco pari 1: (2, 4) lunghezza 2
- Blocco pari 2: (6, 8, 10, 12) lunghezza 4
- Blocco pari 3: (14, 16, 18, 20, 22, 24) lunghezza 6
- Blocco pari 4: (26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40) lunghezza 8 e così via.

Distribuzione negli insiemi:

Insieme A:

Contiene i blocchi dispari di posizione dispari (1, 3, 5, ...) e i blocchi pari di posizione dispari.

Esempio: $A = (1) \cup (2, 4) \cup (9, 11, 13, 15, 17) \cup (14, 16, 18, 20, 22, 24) \dots$

Insieme B: Contiene i blocchi dispari di posizione pari (2, 4, 6, ...) e i blocchi pari di posizione pari.

Esempio: $B = (3, 5, 7) \cup (6, 8, 10, 12) \cup (19, 21, 23, 25, 27, 29, 31) \dots$

PERCHÉ A B CONTENGONO PROGRESSIONI DI OGNI LUNGHEZZA FINITA

Ogni blocco formato da numeri consecutivi all'interno dei pari o dei dispari; quindi, è una progressione aritmetica di ragione 2.

Le lunghezze dei blocchi crescono senza limite (1, 3, 5, 7... per i dispari e 2, 4, 6, 8... per i pari).

Dato un qualunque intero n , esiste sempre un blocco (sia in A che in B) con lunghezza almeno n .

Quel blocco contiene quindi una progressione aritmetica di lunghezza n .

Dunque, sia A che B contengono progressioni aritmetiche di ogni lunghezza finita.

PERCHÉ NON ESISTONO PROGRESSIONI ARITMETICHE INFINITE

Si potrebbe obiettare che una progressione infinita potrebbe saltare tra i blocchi evitando sempre quelli dell'altro insieme.

Mostriamo che questo non è possibile.

Supponiamo per assurdo che esista una progressione aritmetica infinita tutta contenuta in A, con ragione d .

Caso 1: d è pari.

Tutti i termini della progressione hanno la stessa parità (tutti pari oppure tutti dispari).

Supponiamo siano tutti dispari (il caso dei pari è identico).

Allora la progressione vive interamente nel binario dei dispari, che è suddiviso in blocchi consecutivi alternati tra A e B con lunghezze che crescono senza limite.

Poiché i blocchi assegnati a B sui dispari sono intervalli che diventano arbitrariamente lunghi, una progressione con passo fisso d non può evitare indefinitamente questi intervalli: non appena la lunghezza di un blocco di B supera d , la progressione dovrà necessariamente colpirlo.

Questo contraddice il fatto che la progressione è tutta in A.

Caso 2: d è dispari.

In questo caso la progressione alterna numeri pari e dispari.

Consideriamo la sottosuccessione formata dai termini di posto pari (secondo, quarto, sesto...).

Questa sottosuccessione è ancora una progressione aritmetica con ragione $2d$, che è pari.
Questa sottosuccessione ricade quindi nel Caso 1: vive interamente o nei pari o nei dispari e non può evitare i blocchi arbitrariamente lunghi dell'altro insieme.

CONCLUSIONE

La costruzione garantisce che:

- Sia A che B contengono progressioni aritmetiche di ogni lunghezza finita.
- Nessuno dei due contiene una progressione aritmetica infinita.

L'idea chiave è che i blocchi assegnati alternativamente ai due insiemi diventano arbitrariamente lunghi: questo agisce come un muro insuperabile che impedisce a qualunque progressione con passo fisso di restare confinata in un solo insieme per sempre.