

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
Оргкомитета III (областного)
этапа республиканской олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилевского
облисполкома

С.В. Леонова
«30» ноября 2009 г.

Задания для II этапа республиканской олимпиады
по математике
12 декабря 2009 года

9 класс

1. Диагональ трапеции делит ее на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.
2. Число 2009 представили в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел. Какое наибольшее число слагаемых может быть в этой сумме?
3. В компьютер попал вирус. Действие вируса заключается в следующем. На жестком диске он создает 9 папок. Далее, случайным образом выбирает несколько из них (количество выбранных папок каждый раз может меняться) и создает в каждой из выбранных папок еще по 9 папок. Остальные папки остаются пустыми. С вновь созданными папками вирус поступает аналогично. Данная процедура повторилась несколько раз, пока вирус не был заблокирован антивирусом. В результате действия вируса на диске было создано 2009 пустых папок. Сколько непустых папок создал вирус?
4. Доказать, что при любых x, y, z хотя бы одно из чисел $x^2 - 2yz + y^2$, $y^2 - 2zx + z^2$, $z^2 - 2xy + x^2$ будет неотрицательным.
5. Король стоит на поле a1. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Кто выигрывает, если побеждает тот, кто поставит короля на поле h8.

Указания к решению
9 класс

1. Ответ: 4.

Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . AC диагональ трапеции. По условию $\triangle ABC$ подобен $\triangle DCA$ и $\frac{CD}{AB} = 2$.
Из подобия треугольников имеем: $\frac{CD}{AB} = \frac{AC}{BC}$ (1) и $\frac{CD}{AB} = \frac{AD}{AC}$ (2).
Обозначим $BC = x$, $AD = y$, $AC = d$ и учтем, что $\frac{CD}{AB} = 2$, тогда равенства (1) и (2) перепишутся в виде: $\frac{d}{x} = 2$ (3) и $\frac{y}{d} = 2$ (4). Из равенства (3) $d = 2x$.
Подставим это значение во равенство (4): $\frac{y}{2x} = 2$, откуда $\frac{y}{x} = 4$.

2. Ответ: 49.

Пусть число 2009 представили в виде суммы m последовательных натуральных чисел:

$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+m) = 2009$, где n – некоторое целое неотрицательное число.

$$nm + (1+2+\dots+m) = 2009$$

$$nm + \frac{1+m}{2}m = 2009$$

$$2nm + (1+m)m = 4018$$

$$m(2n+1+m) = 4018$$

Требуется найти наибольшее возможное значение m . Очевидно, что $m < 2n+1+m$. Рассмотрим все возможные способы представления числа 4018 в виде произведения двух натуральных множителей, первый из которых меньше второго.

$$4018 = 2 \cdot 7^2 \cdot 41. \text{ Отсюда несложно найти все способы:}$$

$$4018 = 1 \cdot 4018 = 2 \cdot 2009 = 7 \cdot 574 = 14 \cdot 287 = 41 \cdot 98 = 49 \cdot 82.$$

Видно, что наибольшее значение, которое может принимать первый (меньший) из множителей – это 49. Т. е. $m = 49$, тогда $2n+1+49 = 82$, $n = 16$.

Сделаем проверку:

$$(16+1) + (16+2) + \dots + (16+49) = 17 + 18 + \dots + 65 = \frac{17+65}{2} \cdot 49 = 2009$$

3. Ответ: 250 папок.

Пусть вирус создал x пустых папок. Заметим, что создание в пустой папке девяти новых папок увеличивает общее количество пустых папок на 8 (1 пустая папка исчезает и появляются 9 новых). Связь между количеством непустых и пустых папок отобразим в таблице.

Число непустых папок	Число пустых папок
0	9
1	$9 + 8 = 17$
2	$9 + 8 \cdot 2 = 25$
3	$9 + 8 \cdot 3 = 33$
...	...
X	$9 + 8x = 2009$

Итак, имеем уравнение: $9 + 8x = 2009$. Откуда $x = 250$.

4. Доказательство:

Предположим противное: пусть все числа $x^2 - 2yz + y^2$, $y^2 - 2zx + z^2$, $z^2 - 2xy + x^2$ будут отрицательными. Тогда отрицательной будет и их сумма:

$$(x^2 - 2yz + y^2) + (y^2 - 2zx + z^2) + (z^2 - 2xy + x^2) < 0.$$

Выполнив перегруппировку слагаемых и выделив полные квадраты, получим:

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) < 0,$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 < 0.$$

Последнее равенство невозможно, т. к. квадрат действительного числа является числом неотрицательным, а сумма неотрицательных слагаемых не может быть меньше нуля. Значит исходное предположение оказалось неверным и среди чисел $x^2 - 2yz + y^2$, $y^2 - 2zx + z^2$, $z^2 - 2xy + x^2$ есть хотя бы одно неотрицательное.

5. Ответ: Выигрывает первый игрок.

Решение: Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Поле a1 имеет координаты (1; 1), поле h8 – (8, 8). Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с четными координатами. Первый ход – на поле b2 с координатами (2; 2).