# Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou Matière : Mathématiques

Contenus programi Recommand pédagogio	dations	<ul> <li>Tracer les courbes repexploiter pour l'assimilation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Inéquation de type</li> <li>Les angles inscrits, les Représentation graphes</li> <li>La résolution des équations occasion pour approfondir les l'étude des angles inscrit et quelque relation dans le trial</li> </ul>	orésentatives des fordes notions de pérides notions de pérides :  cos(x)=a. sin(x)=a. tan(x)=a. terique : ce sin(x)>a ou sin(x) = a ou sin(x) = a ou tan(x)	(x) <a. ant="" cercle="" cos.="" et="" le="" n="" s(x)<a.="" serra="" sin="" sinscriptibles.="" strigonométrique="" th="" trigonométrique.<="" une=""></a.>	
Contenus programi Recommand pédagogie Fichiers utilise la préparati cours	dations	<ul> <li>Tracer les courbes repexploiter pour l'assimilation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Inéquation de type</li> <li>Les angles inscrits, les Représentation graphes</li> <li>La résolution des équations occasion pour approfondir les l'étude des angles inscrit et quelque relation dans le trial</li> </ul>	orésentatives des fordes notions de périodes notions de périodes :  cos(x)=a. sin(x)=a. tan(x)=a.  étrique: ce sin(x)>a ou sin(c) ce cos(x)>a ou cos ce tan(x)>a ou tan es quadrilatères hique de fonctions de tanguis concerna eles quadrilatères in	(x) <a. ant="" cercle="" cos.="" et="" inscriptibles.="" le="" n="" s(x)<a.="" serra="" sin="" strigonométrique="" th="" trigonométrique.<="" une=""></a.>	
Recommand pédagogie Fichiers utilise la préparati cours	dations ique	<ul> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Equation de type</li> <li>Inéquation trigonomé</li> <li>Inéquation de typ</li> <li>Inéquation de typ</li> <li>Inéquation de typ</li> <li>Les angles inscrits, le</li> <li>Représentation grapl</li> <li>La résolution des équations occasion pour approfondir le</li> <li>L'étude des angles inscrit et quelque relation dans le tria</li> </ul>	cos(x)=a. sin(x)=a. tan(x)=a.  etrique: ee sin(x)>a ou sin(ee cos(x)>a ou cose tan(x)>a ou tane es quadrilatères hique de fonction et des inéquations les acquis concerna	s(x) <a. td="" u(x)<a.="" u(x)<a<=""></a.>	
pédagogio Fichiers utiliso la préparati cours	ique	<ul> <li>Inéquation de typ</li> <li>Inéquation de typ</li> <li>Inéquation de typ</li> <li>Les angles inscrits, le</li> <li>Représentation graph</li> <li>La résolution des équations occasion pour approfondir le L'étude des angles inscrit et quelque relation dans le tria</li> </ul>	pe sin(x)>a ou sin( pe cos(x)>a ou cos pe tan(x)>a ou tan es quadrilatères hique de fonction s et des inéquations les acquis concerna t les quadrilatères in	s(x) <a. th="" u(x)<a.="" u(x)<a<=""></a.>	
pédagogio Fichiers utiliso la préparati cours	ique	<ul> <li>La résolution des équations occasion pour approfondir l</li> <li>L'étude des angles inscrit et quelque relation dans le tria</li> </ul>	s et des inéquations les acquis concerna : les quadrilatères ir	s trigonométrique serra une ant le cercle trigonométrique.	
la préparati cours	sés dans				
Rôle de l'ense	Fichiers utilisés dans la préparation du cours  Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électro Distribution périodique du programme de mathématiques			·	
	seignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations			
Rôle de l'app	prenant	Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème/propriété et répondre aux exercices			
		-	quations trigonome	<u>étriques</u>	
<u>Pr</u>	ropriété :	1. Equations t	<u>trigonométriques</u>		
	<u>a.</u> Equation de forme $(1)\cos(x) = a$		b. Equation $(2)\sin(x)$		

## <u>Propriété</u>

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ 

- Si  $a \notin [-1,1]$  alors l'équation (1) n'admet pas de solution dans  $\mathbf{R}$ .
- •Si  $a \in ]-1,1[$  alors il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que  $\cos(\alpha)=a$ .

  Donc l'équation (1) devient

Alors

$$x = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ou}$$
$$x = -\alpha + 2k'\pi / k' \in \mathbf{Z}$$

 $\cos(x) = \cos(\alpha)$ 

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

#### **Propriété**

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ 

- Si  $a \notin [-1,1]$  alors l'équation (1) n'admet pas de solution dans  $\mathbf{R}$ .
- •Si  $a \in ]-1,1[$  alors il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que  $\sin(\alpha) = a$ .

  Donc l'équation (2) devient  $\sin(x) = \sin(\alpha)$

**Alors** 

$$x = \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$
 Ou  
 $x = \pi - \alpha + 2k'\pi / k' \in \mathbf{Z}$ 

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est :

$$S_2 = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\} \boxtimes \{\pi - \alpha + 2k'\pi / k\}$$

# **Exemples**:

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $1 \otimes \cos(x) = \frac{1}{2}$  et  $2 \otimes \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 

$$\Theta \quad 1 \otimes \cos(x) = \frac{1}{2}$$

On a  $\frac{1}{2} \in [-1;1]$  donc il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ .

 $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  donc l'équation (1) devient  $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 

Par conséquent  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$  Ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k \pi / k \in \mathbb{Z}$ 

$$S_{1} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \right\} \mathbb{Z} \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k '\pi / k ' \in \mathbf{Z} \right\}$$
 D'où

$$\Theta \quad 2 \otimes \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a 
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1;1]$$
 donc il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que  $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Or on a 
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
 donc l'équation (2) devient  $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{N} \qquad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k '\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k '\pi / k ' \in \mathbf{Z}$$
 Par conséquent

$$S_2 = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \mathbb{Z} \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k \, \text{'} \, \pi / k \, \text{'} \in \mathbf{Z} \right\}$$
 D'où

### Cas particuliers:

$$\begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \\ \cos(x) = -1 \end{cases}$$
Si 
$$\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \sin(x) = 1 \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \\ x = 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \\ x = \pi + 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

#### Remarque

Pour résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle donné ; on la résoudre sur  $^{\text{$\mathbb{N}$}}$  puis encadrer les solutions sur cet intervalle de telle sorte trouver les valeurs possibles de nombre relatif k

Résoudre dans  $\[ \mathbb{R} \]$  puis dans l'intervalle  $\[ ]-\pi;\pi \]$  les équations suivantes :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
  $\sin(x) = \frac{1}{2}$   $\sqrt{2}\cos^2(x) - \cos(x) = 0$ 

# a. Equations de forme $\tan(x) = a$

#### Propriété

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; on considère l'équation suivante (3)  $\tan(x) = a$ 

Il existe un nombre réel unique  $\alpha$  tel que  $\tan(\alpha) = a$ . Alors l'équation (3) devient  $\tan(x) = \tan(\alpha)$ .

Par conséquent	$x = \alpha + k$	$\pi / k \in \mathbf{Z}$
----------------	------------------	--------------------------

donc l'ensemble des solutions est  $S_3 = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbf{Z}\}$ 

## **Exemple**

Résoudre dans  $\[mathbb{I}\]$  l'équation suivante  $\tan(x) = 1$ 

On a 
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
  $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 

Par conséquent 
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbf{Z}$$
; alors  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbf{Z} \right\}$ 

Résoudre dans I les équations suivantes :

$$\tan(x) = \sqrt{3}$$
 ;  $I = \mathbb{Z}$ 

2) 
$$3 \tan^2(x) - 1 = 0$$
 ;  $I = \left[ \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ 

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \qquad \left[\frac{-\pi}{2}; \pi\right]$$

# 2. Inéquations trigonométriques

Pour résoudre une équation trigonométrique de forme  $\cos(x) \ge a$ ;  $\cos(x) \le a$ ;  $\sin(x) \ge a$  ou  $\sin(x) \le a$  on suit les étapes suivantes :

- Θ Résoudre l'équation cos(x) = a (respectivement sin(x) = a)
- **Θ** Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Θ Marquer sur les axes des abscisses (respectivement les axes des ordonnés) les valeurs satisfaisant l'inéquation puis on détermine sur le cercle trigonométrique les arcs correspondants.

De même pour les inéquations de tangente.

# **Exemples**

• Résoudre dans  $I = ]-\pi;\pi]$  l'inéquation  $\cos(x) > \frac{1}{2}$ 

On a 
$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$
 donc  $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$ 

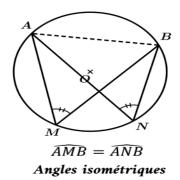
Par conséquent 
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$
 Ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$ 

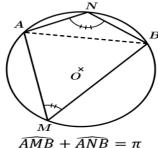
D'après le cercle trigonométrique on a $S_{I} = \left[ \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$ Pour l'inéquation $\cos(x) \le \frac{1}{2}  \text{On a}  S_{I} = \left[ -\pi; \frac{-\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}; \pi \right]$	
* Résoudre dans $I = ]-\pi;\pi]_{1,\text{inéquation}} \sin(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)  \text{Donc}  \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	
Par conséquent $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ Ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z}$ $M'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	
$D'où S_I = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$	
D'après le cercle trigonométrique on a $S_I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$	
Pour l'inéquation $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ On a $S_I = \left] -\pi; \frac{\pi}{4} \left[ \cup \right] \frac{3\pi}{4}; \pi \right]$	
Résoudre dans $I$ les inéquations suivantes :	
* $\cos x > \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ; $I = [0; 2\pi]$	
$* 2\cos x - \sqrt{3} \ge 0  ;  I = ]-\pi;\pi]$	
* $\sqrt{2}\sin x + 1 \le 0$ ; $I = ]-\pi;\pi]$ ; $(\sqrt{2}\sin x + 1)(2\cos x - \sqrt{3}) \ge 0$ $I = ]-\pi;\pi]$	
II. Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles  1. Angle inscrit – Angle au centre  Définition	
Soient $(C)$ un cercle de centre O , et [AB] une corde de $(C)$ et $M \in (C)$ .	

L'angle AMB est appelé *angle inscrit* interceptant la corde [AB] sur (C).

L'angle AOB est appelé *angle au centre* intercentant la corde [AB] sur (C).

## <u>Propriété</u>





 $\overline{AMB} + \overline{ANB} = \pi$ Angles supplémentaires

## 2. Quadrilatères inscriptibles

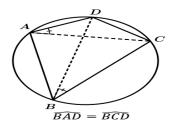
#### **Définition**

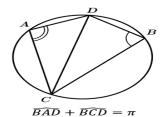
*Un quadrilatère inscriptible* est un quadrilatère dont les sommets se trouvent tours sur un seul et même cercle. Les sommets sont dits *cocycliques*. Le cercle est dit *circonscrit au quadrilatère*.

#### <u>Propriété</u>

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartenant au cercle ( C ) si et seulement si  $\overrightarrow{B}AD + \overrightarrow{B}CD = \pi$  ou  $\overrightarrow{B}AD = \overrightarrow{B}CD$ 





Lois de sinus dans un triangle

1. Surface d'un triangle

#### Théorème

Soit $ABC$ un triangle et $S$ sa surface on a : $S = \frac{1}{2}AC \times BC \times \sin\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{1}{2}AC \times AB \times \sin\left(\frac{B}{D}\right)$	
Soit $ABC$ un triangle équilatéral tel que $AC = 4$	
Calculer $S$ la surface du triangle $ABC$ .	
1. Lois de sinus dans un triangle :  Théorème 01 :  Soit ABC un triangle et soit R le rayon de cercle circonscrit au triangle ABC.  On a $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC} = \frac{\sin(C)}{AB} = \frac{1}{2R}$	
Théorème 02 :  Soient ABC un triangle et p son périmètre et r est le rayon de cercle inscrit au triangle ABC. On a : $S = \frac{1}{2} pr$	