التمرين الثالث

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2) تعطى في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية:

$225x-180y=90$ (1) عين حلا خاصا للمعادلة (1) ثم استنتج حلها العام .

3) عين مجموعة حلو ل المعادلة (1) التي تحقق. $|x-y+1|<2$

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α

ويكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β . عين α و β ثم a وb .

التمرين الثالث

1 $p\gcd(180,225)=45$.

2 $225x-180y=90$ معناه $5x-4y=2$ (2)

وحل خاص لهذه المعادلة هو $(2,2)$ لأن: $5\times2-4\times2=2$ (3)

بطرح (3) من (2) نجد : $5(x-2)=4(y-2)$ وحسب نظرية غوص:

4 يقسم الجداء $5(x-2)$ و 4 أولي مع 5 إذن 4 يقسم $(x-2)$.

أي $(x-2)=4k$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $(y-2)=5k$ ، $k\in\mathbb{Z}$ إذن: $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$

3 لدينا $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $|x-y+1|<2$ ومنه: $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $|k|<2$

$x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $k\in\{-1,0,1\}$

وبالتالي : $(x,y)\in\{(-2,-3),(2,2),(6,7)\}$.

3 لدينا : $a=5\alpha+2=4\beta+4$ و $b=2\alpha^2+5\alpha+2=2\beta^2+6$ ومنه : $5\alpha-4\beta=2$ و $2(\alpha^2-\beta^2)+5\alpha=4$

أي: $\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $2(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)+5\alpha=4$

$\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $2(-k).(9k+4)+5(4k+2)=4$

$\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $-3k^2+2k+1=0$ إذن : $\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $k=1$

وبالتالي : $\alpha=6$ و $\beta=7$ $a=32$. و $b=104$

التمرين الثالث

I . لكل عدد طبيعي n نعتبر النسبة : $A=\dfrac{2n+7}{n^2+7n+12}$

1. بين ان كل العددين $n+3$, $n+4$ أولي مع العدد
2. استنتج ان النسبة غير قابلة للاختزال $2n+7$

II . 1. أ) باستعمال خوارزمية اقليدس أوجد حلا للمعادلة $19x+29y=1$ (x ,y عددان صحيحان)

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة $19x+29y=818$

2- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $19x+29y=818$ (x ,y عددان صحيحان)

7

برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n , العدد $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7 .

استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد a على 7 في كل حالة من الحالات التالية .

أ - $a=2^{3n}$. ب - $a=2^{3n+1}$. جـ - $a=2^{3n+2}$

8

n عدد طبيعي .

نضع : $a=11n+3$ و $b=13n-1$.

1) بين أن $13a-11b=50$.

2) عين كل القيم الممكنة $PGCD(a;b)$.

3) عين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$.

8

عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(a;b)$ التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\ PGCD(a;b)=16\end{cases}$.

8

. a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $PGCD(a;b)=d$.

عين كل الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق $ab+5d^2=35d$.

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $x = 7a - 5b$ و $y = 4a - 3b$.

1) برهن أن $PGCD(|x|;|y|) = PGCD(a;b)$.

2) عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ حيث $\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\ PGCD(\alpha;\beta)=5\end{cases}$.

من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما .

مبرهنة بيزو : يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = 1$$

- ❖ $a = n + 3$ و $b = 2n + 7$.
- ❖ $a = 3n + 4$ و $b = 8n + 11$.
- ❖ $a = 9n + 7$ و $b = 5n + 4$.
- ❖ $a = 7n^2 + 2$ و $b = 4n^2 + 1$.

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc

تمرين: 1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x - 16y = 0$.

2) تأكد أن الثنائية $(4;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x - 16y = 4$.

استنتج في $\mathbb{Z}^2$ **مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول** $(x;y)$ **:** $9x-16y=4$.

الحل: 1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و باتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9(16k)=16y$ و منه $y=9k$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k;9k)$ حيث k عدد صحيح .

2) $9\times 4-16\times 2=36-32=4$ و منه $(4;2)$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times 4-16\times 2=4$ إذن $9x-16y-(9\times 4-16\times 2)=0$. و منه $9(x-4)=16(y-2)$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9(x-4)=16(y-2)$ نحصل على $9(16k)=16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k+4;9k+2)$ حيث k عدد صحيح .

تمرين محلول2: ليكن n عددا طبيعيا . أثبت أن العدد $A=n(5n+1)(13n+1)$ يقبل القسمة على 6.

طريقة: للبرهان على **أن العدد A يقبل القسمة على 6 يكفي البرهان أن A يقبل القسمة على 2 و على 3 ، لأن** 2 و 3 **أوليان فيما بينهما.**

الحل: • نبرهن أن A يقبل القسمة على 2 .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv 0[2]$ أو $n\equiv 1[2]$.

إذا كان $n\equiv 0[2]$ فإن $A\equiv 0[2]$.

إذا كان $n\equiv 1[2]$ فإن $(5n+1)\equiv 6[2]$ و $6\equiv 0[2]$ و منه $(5n+1)\equiv 0[2]$ و بالتالي $A\equiv 0[2]$

إذن في الحالتين $A \equiv 0[2]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A \equiv 0[2]$.

- نبرهن أن A يقبل القسمة على 3 .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n \equiv 0[3]$ أو $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$.

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن $A \equiv 0[3]$.

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن $(5n+1) \equiv 6[3]$ و $6 \equiv 0[3]$ و منه $(5n+1) \equiv 0[3]$ و بالتالي $A \equiv 0[3]$.

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن $(13n+1) \equiv 27[3]$ و $27 \equiv 0[3]$ و منه $(13n+1) \equiv 0[3]$ وبالتالي $A \equiv 0[3]$.

إذن في الحالات الثلاث $A \equiv 0[2]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A \equiv 0[3]$.

A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A يقبل القسمة علي 6