

Corrigé air-MP 2002

Partie I : Propagation d'onde en présence d'un plan conducteur.

1-1) Conductivité $\gamma = \infty$; donc $E_2 = B_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_1 &= 0 \quad (\text{Maxwell - Gauss}) & \text{div } \vec{B}_1 &= 0 \quad (\text{Maxwell - Flux}) \\ \text{rot } \vec{E}_1 &= -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (\text{Maxwell - Faraday}) & \text{rot } \vec{B}_1 &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell - Ampère}) \end{aligned}$$

1-2) Equations de Maxwell :

1-3) Etant donné le choix : $\vec{E}_1(x, z) = \vec{E}'_1(x) e^{j(\omega t - kz)}$; $\vec{B}'_1(x, z) = \vec{B}'_1(x) e^{j(\omega t - kz)}$ les champs $\vec{E}'_1$ et $\vec{B}'_1$ vérifient

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}'_1 - jk E'_{1z} &= 0 \quad (M1) & \text{div } \vec{B}'_1 - jk B'_{1z} &= 0 \quad (M2) \\ \text{rot } \vec{E}'_1 - jk \vec{u}_z \wedge \vec{E}'_1 &= -j\omega \vec{B}'_1 \quad (M3) & \text{rot } \vec{B}'_1 - jk \vec{u}_z \wedge \vec{B}'_1 &= j\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}'_1 \quad (M4) \end{aligned}$$

1-4) On projete sur la base cartésienne: $(M1) \quad \frac{dE'_{1x}}{dx} - jk E'_{1z} = 0 \quad (M2) \quad \frac{dB'_{1x}}{dx} - jk B'_{1z} = 0$

$$(M3) : \begin{cases} -jk E'_{1y} = j\omega B'_{1x} \\ jk E'_{1x} + \frac{dE'_{1z}}{dx} = j\omega B'_{1y} \\ -\frac{dE'_{1y}}{dx} = j\omega B'_{1z} \end{cases} \quad (M4) : \begin{cases} k B'_{1y} = \epsilon_0 \mu_0 \omega E'_{1x} \\ jk B'_{1x} + \frac{dB'_{1z}}{dx} = -j\epsilon_0 \mu_0 \omega E'_{1y} \\ \frac{dB'_{1y}}{dx} = j\epsilon_0 \mu_0 \omega E'_{1z} \end{cases}$$

et

$$(M3) : \begin{cases} -jk E'_{1y} = j\omega B'_{1x} \\ k E'_{1x} = \omega B'_{1y} \\ -\frac{dE'_{1y}}{dx} = 0 \end{cases} \quad (M4) : \begin{cases} k B'_{1y} = \epsilon_0 \mu_0 \omega E'_{1x} \\ jk B'_{1x} = -j\epsilon_0 \mu_0 \omega E'_{1y} \\ \frac{dB'_{1y}}{dx} = 0 \end{cases}$$

1-5) Si $E'_{1z} = B'_{1z} = 0$: $(M1) \quad \frac{dE'_{1x}}{dx} = 0 \quad (M2) \quad \frac{dB'_{1x}}{dx} = 0$

M1, M2, M3 donnent: $E'_{1x} = E_{0x} \quad E'_{1y} = E_{0y} \quad B'_{1x} = -\frac{k}{\omega} E_{0y} \quad B'_{1y} = \frac{k}{\omega} E_{0x}$ et M4 impose : $\frac{k^2}{\omega} = \epsilon_0 \mu_0 \omega$

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad ; \quad V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = V_\phi$$

La vitesse de phase est

; la vitesse de groupe est

Le plan conducteur ne perturbe pas la propagation: vitesse, dispersion (outre les conditions supplémentaires en $x = 0$).

1-6) En $x = 0$, il y a continuité de la composante tangentielle de E , $E'_{1y} = E_{0y} = 0$ alors $B'_{1x} = 0$, ce qui correspond à

$$B'_{1y} = \frac{k}{\omega} E_{0x}$$

la continuité de la composante normale de B . Reste donc

1-7) La conditions de passage en $x = 0$: $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)_{\text{tgte}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$ donne $\vec{j}_s = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_{0x} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_z$

2-1) La partie imaginaire traduit l'atténuation à condition que k'' soit < 0 (cela vient du choix : $e^{j(\omega t - kz)}$)

2-2) L'équation de conservation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ combinée à $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ et à $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ conduit à $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \rho / \epsilon_0 = 0$.

Donc si une valeur ρ_0 apparaît à $t = 0$, elle s'annule avec la constante de temps ϵ_0 / γ . Or cette valeur est très faible pour un conducteur (pico seconde pour l'eau de mer). Pour des fréquences VLF on peut considérer que $\rho = 0$.

2-3) $k^2 = -j\mu_0 \gamma \omega = \frac{(1-j)^2 \mu_0 \gamma \omega}{2}$ on trouve alors $k'' = \text{Im}\{k\} = \text{Im}\left\{(1-j)\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}\right\} = -\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$. Le vecteur d'onde étant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

homogène à l'inverse d'une longueur, on trouve une longueur caractéristique (profondeur de pénétration)

2-4) Pour 100 Hz on calcule $\delta = 24$ m. Or les SNLE sont tapis au fond des océans, ils ne peuvent capter les ondes VLF,

sauf à remonter en surface. Les antennes doivent être grandes (typiquement $\lambda/2$ soit plusieurs mètres)

3-1) On écrit les équations de Maxwell avec le choix d'onde proposé:

$$\begin{aligned}
 (M1) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 & (M2) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} - jKB_z &= 0 \\
 (M3) \quad \text{rot}(\vec{E}_x + \vec{E}_y) - jK\vec{u}_z \wedge (\vec{E}_x + \vec{E}_y) &= -j\omega(\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z) \\
 (M4) \quad \text{rot}(\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z) - jK\vec{u}_z \wedge (\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z) &= j\epsilon_0\mu_0\omega(\vec{E}_x + \vec{E}_y)
 \end{aligned}$$

$$(M3) \text{ donne en projection } \begin{cases} KE_y = -\omega B_x \\ KE_x = \omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega B_z \end{cases} \quad \text{et} \quad (M4) \quad \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} + jKB_y = j\epsilon_0\mu_0\omega E_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} + jKB_x = -j\epsilon_0\mu_0\omega E_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit le système} \quad \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} + j\frac{K^2}{\omega} E_x = j\epsilon_0\mu_0\omega E_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} - j\frac{K^2}{\omega} E_y = -j\epsilon_0\mu_0\omega E_y \end{cases} \quad \text{en résolvant} \quad \begin{cases} E_x = \frac{j\omega}{K^2 - \epsilon_0\mu_0\omega^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ E_y = \frac{-j\omega}{K^2 - \epsilon_0\mu_0\omega^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{cases}$$

$$B_z = \frac{j}{\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{K^2 - \epsilon_0\mu_0\omega^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right)$$

3-2) La troisième ligne de l'équation (M3) fournit :

On trouve effectivement que B_z vérifie: $(\Delta_t + K_c^2)B_z = 0$ avec $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et $K_c^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - K^2$

3-3) Les conditions aux limites imposent d'avoir $B_z(x=0) = 0$ ainsi que $B_z(x=a) = 0$.

L'équation précédente devient : $\frac{d^2 B_z}{dx^2} = -K_c^2 B_z$ Si $K_c^2 < 0$ les solutions sont exponentielles et les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites. On considérera donc $K_c^2 > 0$ donc les solutions sont $B_z = B_0 \sin(K_c x + \phi_0)$.

La condition en $x = 0$ impose $\phi_0 = 0$ et celle en $x = a$ impose $K_c = \frac{n\pi}{a}$ où n est entier > 0 désigne un mode possible.

Le vecteur d'onde est donné par : $K^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - K_c^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ Pour qu'il y ait effectivement propagation il

faut que $K^2 > 0$ donc que la pulsation vérifie : $\omega > \omega_c = \frac{n\pi}{a}c$ (avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$) ω_c = pulsation de coupure.

Les plans constituent un filtre passe-haut. Si $a = 60 \text{ km} \Rightarrow \omega_c = 2,5 \text{ n kHz}$. Les ondes VLF ne se propagent pas.

3-4) La relation de dispersion s'écrit: $K^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - K_c^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$. On trouve alors pour les vitesses

$$V_\phi = \frac{\omega}{K} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad V_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{1}{V_\phi} \frac{2\omega d\omega}{2K dK} = \frac{1}{V_\phi} \frac{d\omega^2}{dK^2} = c\sqrt{1-u^2}$$

3-5) Le résultat indique la nécessité de connaître la fréquence utilisée pour utiliser le système dit « Ω ».

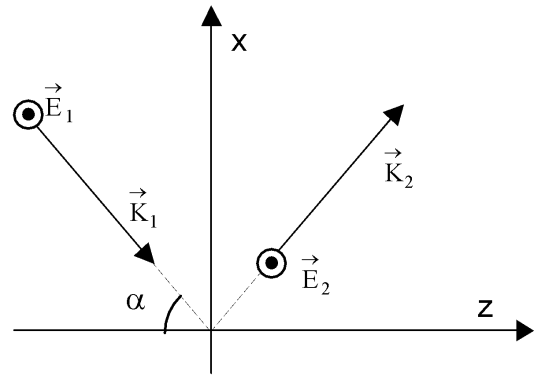
3-6) A partir de $E_z = 0$ et $B_z = B_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - Kz)}$ et des équations de Maxwell projetées on trouve

$$E_x = 0 ; E_y = j\frac{\omega}{\omega_c} B_0 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - Kz)} ; B_x = -j\frac{K}{\omega_c} B_0 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - Kz)} ; B_y = 0$$

3-7) Les valeurs de γ indiquent que les conducteurs possèdent une épaisseur de peau importante ce qui se traduira par une atténuation au cours de la propagation.

4-1) $\vec{K}_1 = K_0(-\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$.

4-2) L'onde incidente met en mouvement les charges mobiles du conducteur, ces mouvements engendrent un rayonnement qui constitue l'onde réfléchie. Pour satisfaire les conditions aux limites le vecteur d'onde $\vec{K}_2$ doit être symétrique de $\vec{K}_1$ par rapport à Ox (loi de Descartes). Donc $\vec{K}_2 = K_0(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$



La relation de continuité en $x = 0$ impose un champ total nul, le

champ réfléchi est donc $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1 e^{j(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{r})} \vec{u}_y$

4-3) Au point M(x,y,z) le champ total est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1' e^{j(\omega t - K_0 \cdot z \cos \alpha)} \left[e^{jK_0 \cdot x \sin \alpha} - e^{jK_0 \cdot x \sin \alpha} \right] \vec{u}_y = E_1' e^{j(\omega t - K_0 \cdot z \cos \alpha)} [2j \sin(K_0 x \sin \alpha)] \vec{u}_y$$

4-4) A partir de l'équation de Maxwell-Faraday on calcule le champ magnétique:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = -\frac{2K_0}{\omega} E_1' e^{j(\omega t - K_0 \cdot z \cos \alpha)} [j \cos \alpha \sin(K_0 x \sin \alpha) \vec{u}_x + \sin \alpha \cos(K_0 x \sin \alpha) \vec{u}_z]$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On peut ensuite chercher le vecteur de Poynting : μ_0 (mais en prenant les champs réels!)

$$\vec{R} = \frac{K_0}{\mu_0 \omega} E_1'^2 \begin{cases} \sin \alpha \sin(2K_0 x \sin \alpha) \sin(2\omega t - 2K_0 z \cos \alpha) \vec{u}_x \\ 4 \sin^2(\omega t - K_0 z \cos \alpha) \cos \alpha \sin^2(K_0 x \sin \alpha) \vec{u}_z \end{cases}$$

On trouve :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{2K_0}{\mu_0 \omega} E_1'^2 \cos \alpha \sin^2(K_0 x \sin \alpha) \vec{u}_z$$

4-5) En moyenne la propagation se fait selon z car:

Le vecteur d'onde associé étant la composante selon Oz de $\vec{K}_1$.

Partie II : Etude expérimentale

1) Allongement à l'équilibre $\vec{L} - L_0 = \frac{mg}{2k}$.

2) Le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation fournit pour des angles petits (premier ordre)

$$-Lk(\vec{L} - L_0 + L\theta) + mg \frac{L}{2} - 2mgL\theta = (J_1 + J_2)\ddot{\theta} \quad \text{soit encore :} \quad -kL^2\theta - 2mgL\theta = (J_1 + J_2)\ddot{\theta}$$

3) L'équation est celle d'un oscillateur harmonique : $-(kL + 2mg)\theta = 3mL\ddot{\theta}$ de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{3mL}{kL + mg}}$.

Chimie .

1) En milieu acide les ions PO_4^{3-} et CO_3^{2-} sont quasi-inexistants, il n'y aura pas de précipités parasites.

2) Pour définir pAg il faut qu'il existe des ions argent dans le milieu! Le précipité apparaît pour

$$[Ag^+].[Cl^-] = 1,78.10^{-10} \quad \text{Soit}$$

$$\frac{10^{-1}V'}{V+V'} \cdot \frac{10^{-1}V}{V+V'} = 1,78.10^{-10}$$

avec $V = 10 \text{ mL}$ on a $V' = 1,8.10^{-10} \text{ mL}$.

On en déduit que le précipité apparaît dès la première goutte.

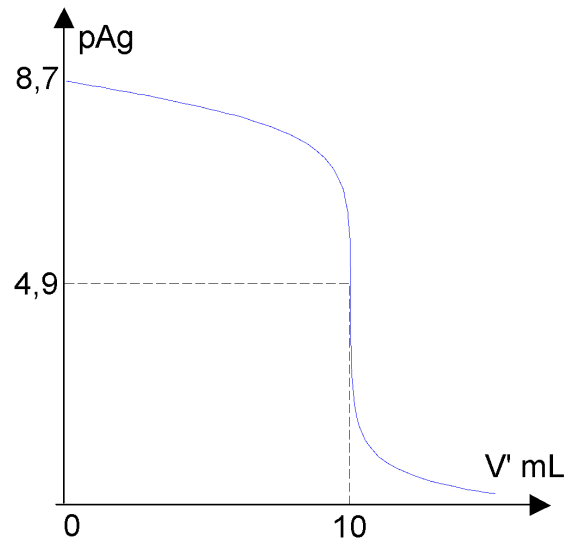
3) L'équivalence correspond à $V' = V = 10 \text{ mL}$.

$$V' < V : \quad [Cl^-] = \frac{10^{-1}(V - V')}{V + V'} \quad \text{et} \quad [Ag^+] = \frac{K_s}{[Cl^-]} \quad \text{donc}$$

$$pAg = pK_s + \text{Log} \frac{10^{-1}(1-x)}{1+x}$$

$$V' > V : \quad [Ag^+] = \frac{10^{-1}(V' - V)}{V + V'} ; \quad [Cl^-] = \frac{K_s}{[Ag^+]} \quad \text{et}$$

$$pAg = \text{Log} \frac{10^{-1}(x-1)}{x+1}$$



A l'équivalence $V' = V$ et $[Ag^+] = [Cl^-] = \sqrt{K_s} = 10^{-4,87}$

4)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	1	1,01	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
pAg	8,66	8,57	8,48	8,38	8,27	8,15	8,01	7,99	7,47	6,45	4,87	3,30	2,32	2,04	1,88	1,78	1,70

1) Méthode de MOHR

1-1) Le précipité apparaît pour $[Ag^+]^2.[CrO_4^{2-}] = 1,3.10^{-12}$ or à l'équivalence $[Ag^+] = 10^{-4,87}$

donc $[CrO_4^{2-}] = 7,4.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Si on met trop de chromate le virage sera prématuré.

1-2) $[CrO_4^{2-}] = 2,5.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ à l'apparition du précipité $[Ag^+]^2 = 1,3.10^{-12} / [CrO_4^{2-}] \Rightarrow [Ag^+] = 2,3.10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

$$[Ag^+] = \frac{K_s(V+V')}{10^{-1}(V-V')} \quad \text{ou} \quad \frac{1,78.10^{-10}(20)}{10^{-1}\Delta V} = 2,3.10^{-5} \quad \text{donc} \quad \Delta V = 1,5.10^{-3} \text{ mL}$$

Ce qui correspond à

L'équivalence est correctement repérée.

2) Méthode de Vohlard-Charpentier

2-1) Phase 1: réaction des Ag^+ en excès avec SCN^- : $Ag^+ + SCN^- \rightleftharpoons AgSCN \downarrow \quad K_s = [Ag^+].[SCN^-]$

Phase 2: formation du complexe quand il n'y a plus d'ion Ag^+ : $Fe^{3+} + SCN^- \rightleftharpoons [FeSCN]^{2+} \quad K_f = \frac{[FeSCN^{2+}]}{[Fe^{3+}][SCN^-]}$

2-2) Il faut retirer la phase solide contenant le précipité d' $AgNO_3$ pour que ce dernier ne se redissolve pas lorsque la concentration en Ag^+ deviendra très faible suite à leur consommation par les SCN^- .