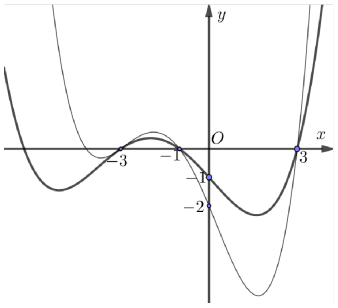
Câu 1. **[2D1-6.7-4] (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019)** Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x)\ge g(x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;3]$.



A. $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$.

Lời giải

Tác giả: Trương Quang Trung; Fb: Trương Trung

Chọn A

Xét $f(x)-g(x)=k(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

$\Rightarrow f(0)-g(0)=k.9.1.(-3)\Rightarrow k=\dfrac{-1}{27}$.

Do đó $f(x)-g(x)=\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Theo đề bài: $f(x)\ge g(x)+m\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge m,\forall x\in[-3;3]$.

Gọi $u(x)=f(x)-g(x)\Leftrightarrow u(x)\ge m,\ \forall x\in[-3;3]$ hay $m\le \underset{x\in[-3;3]}{Min}\,u(x)$. (1)

Xét hàm $u(x)$ ta có:

$u'(x)=(\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3))'=\dfrac{-1}{27}(4x^3+12x^2-12x-36)$.

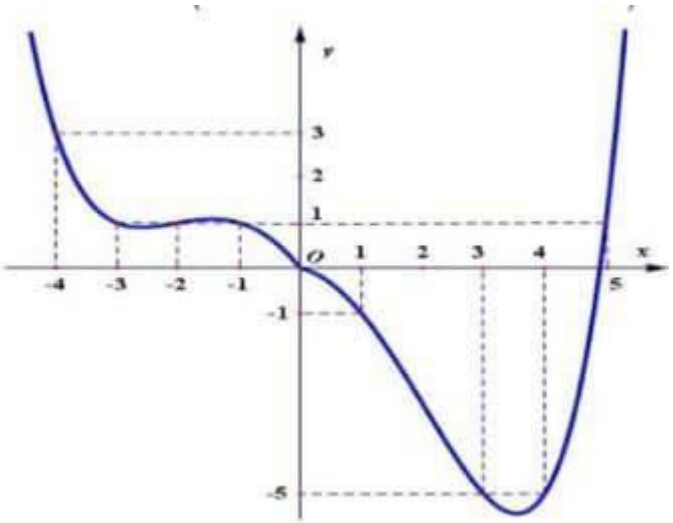
$u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3}\\x=-3\end{array}\right.$.

BBT:

x		-3		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		3	
$u'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$u(x)$			$\searrow$	$\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$		$\searrow$	0	

Do đó (1) $\Leftrightarrow m \le \dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 2. **[2D1-6.7-4] (NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2 \cdot f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Gấm; Fb: Nguyễn Thị Hồng Gấm

Phản biện: Lê Mai Hương; Fb: Le Mai Huong

Chọn D

Ta có $-9x^2 + 30x - 21 = -(3x-5)^2 + 4 \le 4$ nên $\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \in [0;2]$.

Đặt $t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}$ thì $t \in [-3;3]$. Ta cần tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình $f(t) = \dfrac{m-2019}{2}$ có nghiệm $t \in [-3;3]$.

Từ đồ thị suy ra đường thẳng $y = \dfrac{m-2019}{2}$ cắt đồ thị $y = f(t); t \in [-3;3]$ khi và chỉ khi $-5 \le \dfrac{m-2019}{2} \le a; a = \max\limits_{[-3;3]} f(t)$, và cũng từ đồ thị ta có $1 < a < 1,5$.

Do đó $2009 \le m \le 2a + 2019$ và $2021 < 2a + 2019 < 2022$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $2009 \le m \le 2021$.

Vậy có tất cả $2021-2009+1=13$ giá trị nguyên của m thỏa mãn.