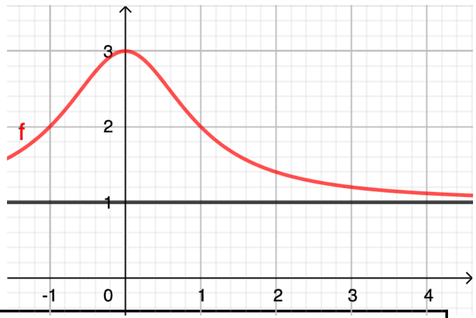
Chapitre 02
Limites et continuité de fonctions

I. Limite d'une fonction à l'infini
1. Limite finie à l'infini

Intuitivement
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.



Exemple
La fonction f définie sur R par
$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^2+1}$$
a pour limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 1 dès que x est suffisamment grand.

Mathématiquement
Soit une fonction f définie sur un domaine de définition D_f incluant un intervalle du type $[a; +\infty[$ où $a \in R$.
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in D_f, \forall x \in D_f, x > A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Définitions
La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si
$$f(x) = L$$
La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si
$$f(x) = L$$

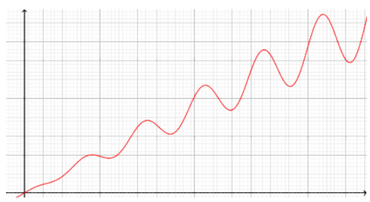
Remarque
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction « se rapproche » de son asymptote.

2. Limite infinie à l'infini

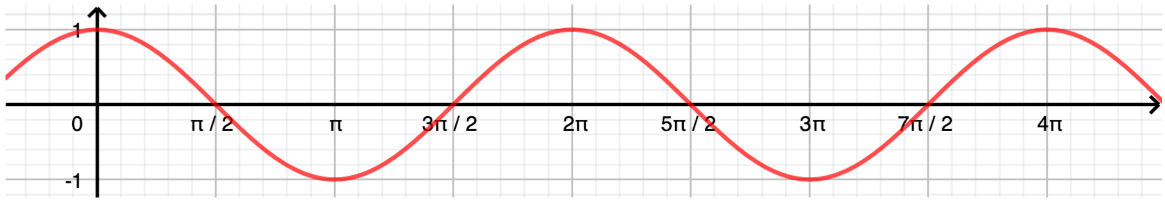
Intuitivement
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.

Remarques
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. On a tracé ci-contre la fonction f définie sur R par
$$f(x) = 0,5x + 0,1x \cos \cos x$$
f n'est pas croissante mais sa limite en $+\infty$ égale $+\infty$



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales telles que cosinus (ci-dessous) ou sinus.



Mathématiquement
Soit une fonction f définie sur un domaine de définition D_f incluant un intervalle du type $[a; +\infty[$ où $a \in R$.
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

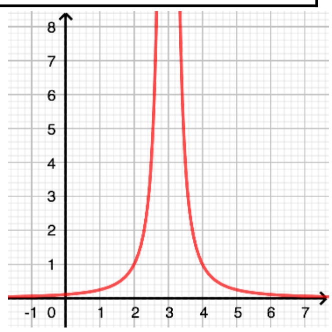
$$\forall L > 0, \exists A \in D_f, \forall x \in D_f, x > A \Longrightarrow f(x) > L$$

3. Limites des fonctions usuelles

Fonction	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
Carré	$x^2 = +\infty$	$x^2 = +\infty$
Cube	$x^3 = -\infty$	$x^3 = +\infty$
Racine carrée	Non définie	$\sqrt{x} = +\infty$
Inverse	$= 0$	$= 0$
Exponentielle	$= 0$	$= +\infty$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.



Exemple
La fonction f définie sur $R\backslash\{3\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 3.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de 3.

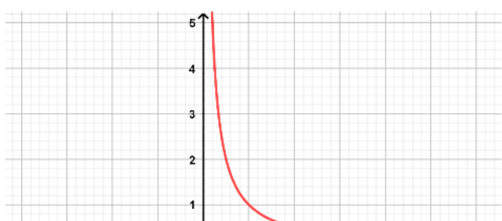
Mathématiquement
Soit une fonction f définie sur un domaine de définition D_f.
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si

$$\forall L > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - A| < \delta \Longrightarrow f(x) > L$$

Définition
La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si

$$f(x) = +\infty \text{ ou } f(x) = -\infty$$

Remarque
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon que $x > A$ ou $x < A$. Considérons la fonction inverse définie sur R^* par



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$, lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note

$$f(x) \ = f(x) \ =-\infty$$

Si $x > 0$, lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note

$$f(x) \ = f(x) \ =+\infty$$

On parle de **limite à gauche** de 0 et de **limite à droite** de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU**

III. Opérations sur les limites

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs**

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1. Limite d'une somme

$f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x) + g(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.***

* Forme indéterminée : on ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2. Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$f(x)$	L	L	∞	0
$g(x)$	L'	∞	∞	∞
$f(x)g(x)$	$L\,L'$	∞**	∞**	**F.I.***

** On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple

Quelle est la limite de $(x-5)\left(3+x^2\right)$ en $-\infty$?

Solution

$(x-5) =-\infty \ et \left(3+x^2\right) =+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit,

$$(x-5)\left(3+x^2\right) =-\infty$$

3. Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$f(x)$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$g(x)$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	∞**	0	∞**	**F.I.*.**	**F.I.***

** On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple

Quelle est la limite de $\frac{1-2x}{x-1}$ en 3 ?

Solution

$x-1 \ = 2 \ et \ 1-2x \ =-5$

D'après la règle sur la limite d'un quotient,

$$\frac{1-2x}{x-1} \ =-\frac{5}{2}$$

Remarque

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture « $\infty - \infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Méthode
Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc**
Calculer
1. $-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ 2. $\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

Solution
1. $-3x^3 =- \infty$ *et* $2x^2 =+ \infty$
On reconnait une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ »
Levons l'indétermination

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Or,

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{x^2} = \frac{1}{x^3} = 0$$

Donc, par limite d'une somme,

$$\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -3$$

De plus, $x^3 =+ \infty$, donc, par limite d'un produit,

$$x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) =- \infty$$

Soit

$$\left(-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1\right) =- \infty$$

2. En appliquant la méthode de la question 1 pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, nous obtenons une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».
Levons l'indétermination

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

Or,

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{x^2} = \frac{5}{x^2} = 0$$

Donc, par limite d'une somme,

$$2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

Donc, par limite d'un quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$$

Méthode
Déterminer une asymptote
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto**
Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-2}{1-x}$$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

Solution

$$1 - x = -\infty$$

Donc, par limite d'un quotient,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

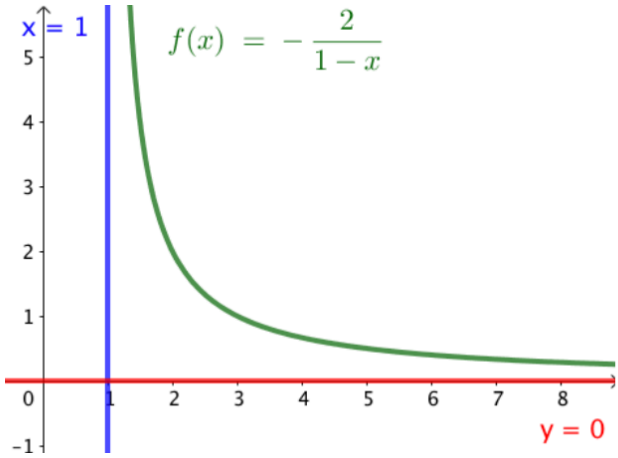
$$1 - x = 0$$

Donc, par limite d'un quotient,

$$\frac{-2}{1-x} = +\infty \; (x > 1 \Longrightarrow 1 - x < 0)$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en 1.

En traçant la fonction f à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, il est possible de le vérifier.



IV. Calculs de limites par composition et comparaison

1. Composition de limites

Méthode

Déterminer la limite d'une fonction composée

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/DNU1M3Ii76k**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/f5i_u8XVMfc**

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Solution

$$\frac{1}{x} = 0$$

Donc

$$\frac{1}{x} = 2$$

Par composition de limites,

$$= \sqrt{2}$$

2. Comparaison

Méthode

Calculer une limite par comparaison

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y**

Calculer $x + \sin sin\, x$

Solution

$\sin sin\, x$ n'existe pas. Sous la forme donnée, la limite cherchée est donc indéterminée.

Levons l'indétermination

$$\forall x \in R, -1 \leq \sin sin\, x \Longrightarrow x - 1 \leq x + \sin sin\, x$$

Or,

$$x - 1 = +\infty$$

Donc, par comparaison,

$$x + \sin sin\, x = +\infty$$

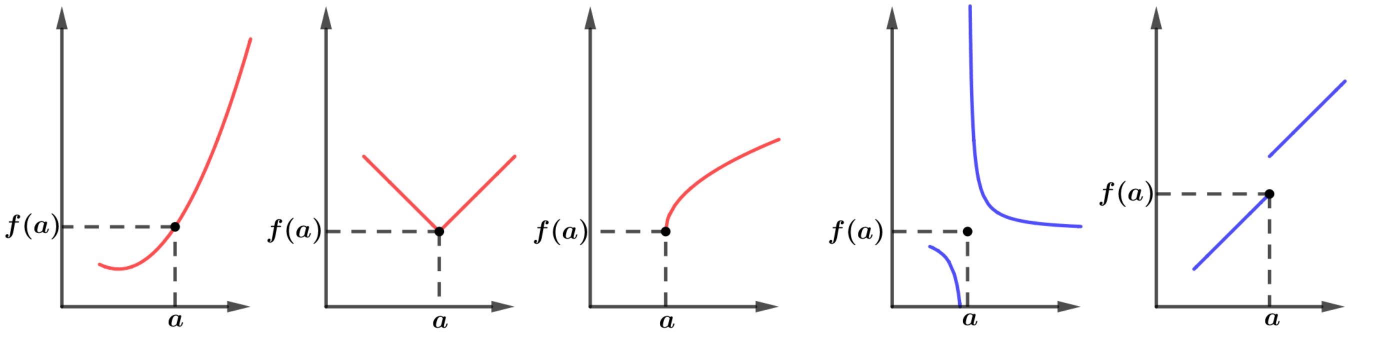
V. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815-1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1. Continuité

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o**

Exemples et contre-exemples



La fonction f est continue en a *La fonction f n'est pas continue en a*

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon (dans le dernier cas, on dira que la fonction est **continue à gauche** mais pas à droite de a).

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est **continue en a** si $f(x) \ = f(a)$
- f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.

Remarque

La continuité de la fonction f en a équivaut à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Fonctions de références

Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

Fonction	Expression	Domaine de continuité
Valeur absolue	$\|x\|$	R
Monôme	$ax^n \ (a \in R, n \in N)$	R
Polynôme	$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ (a_k \in R)$	R
Racine carrée	$\sqrt{x}$	R_+
Inverse	$\frac{1}{x}$	R^*
Homographique	$\frac{ax+b}{cx+d} \ (a, b, c, d \in R)$	$R \backslash \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
Exponentielle	e^x	R
Cosinus	$\cos cos\, x$	R
Sinus	$\sin sin\, x$	R

Remarques

- Certaines fonctions ne sont continues en aucun point. C'est le cas de la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \{1 \ si \ x \in Q \ 0 \ si \ x \in R \backslash Q$$

- Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Propriété
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel.
- $k \times u$ est continue sur I
- $u + v$ est continue sur I
- $u \times v$ est continue sur I
- u/v est continue sur I là où v ne s'annule pas.

Exemple

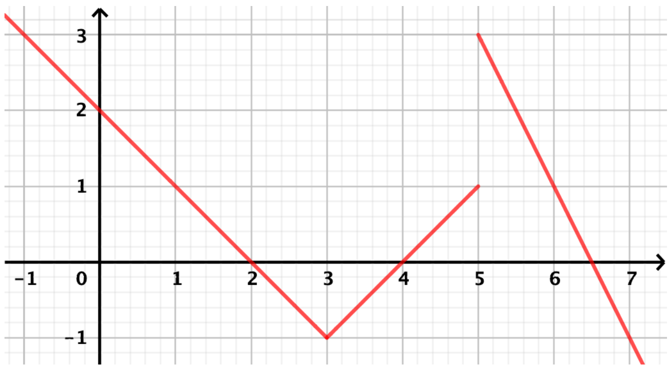
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ est continue en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (ou en tant que fonction polynôme).

Théorème
Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque
La réciproque n'est pas vraie.
- La fonction **valeur absolue** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 (mais dérivable à gauche et à droite de 0).
- La fonction **racine carrée** est continue sur R_+ mais pas dérivable en 0.

Méthode
Étudier la continuité d'une fonction
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \{- x + 2 \; si \; x < 3 \; x - 4 \; si \; 3 \leq x < 5 \; - 2x + 13 \; si \; x \geq 5$.
La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Solution
Les fonctions $x \mapsto - x + 2$, $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto - 2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]- \infty; 3[$, sur $[3; 5[$ et sur $[5; + \infty[$
Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5.
$f(x) = (- x + 2) =- 3 + 2 =- 1$
$f(x) = (x - 4) = 3 - 4 =- 1$
$f(x) = f(x) = f(3)$
La fonction f est donc **continue en 3**
$f(x) = (x - 4) = 5 - 4 = 1$
$f(x) = (- 2x + 13) =- 2 \times 5 + 13 = 3$
La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de **limite à gauche** de f en 5 et **de limite à droite** de f en 5. La fonction f n'est donc pas continue en 5. La fonction f est continue sur $]- \infty; 5[$ et sur $[5; + \infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$.



2. Valeurs intermédiaires

Exemple
Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[- 4; 1]$ dont les variations sont données dans le tableau ci-contre. Donner le nombre de solution(s) éventuelle(s) de chacune des équations ci-dessous et encadrer au mieux ces solutions.

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

a. $f(x) = 18$ **b.** $f(x) = 0$
c. $f(x) =- 3$ **d.** $f(x) = 3$
Solution
a. L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $]- 1 ; 1[$.
b. L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]- 4 ; - 3[$, $]- 3 ; - 1[$ et $]- 1 ; 1[$

c. L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.
d. L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $]-1;1[$.

Théorème des valeurs intermédiaires
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un réel** $c \in [a;b]$ tel que
$$f(c) = k$$

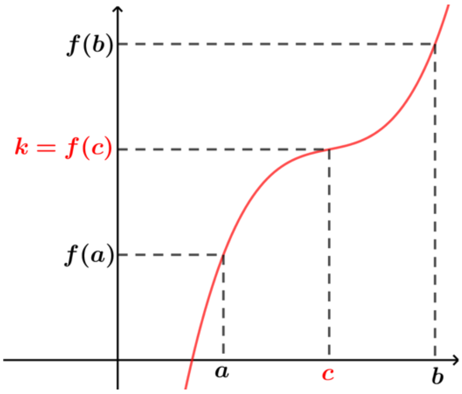
- Admis -

Conséquence
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$

Cas particuliers
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes contraires** alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$
- Le théorème reste vrai **si** $a = -\infty$ **ou si** $b = +\infty$ et si f admet une limite (même infinie) en $-\infty$ ou en $+\infty$
- Le théorème reste vrai **si** $f(x) = -\infty$ **ou si** $f(x) = +\infty$

Corollaire au TVI
On considère la fonction f définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique réel** $c \in [a;b]$ tel que
$$f(c) = k$$

- Admis –



Remarque
Une fonction est **strictement monotone** si elle est **strictement croissante** ou **strictement décroissante** (autrement dit si sa dérivée ne change pas de signe et ne s'annule pas sur un intervalle).

Méthode
Résolution approchée d'une équation
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2;+\infty[$
2. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

Solution
1. Existence
$$f(2) = 2^3 - 3\times2^2 + 2 = -2$$
et $f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$ *par produit des limites*
Ainsi, $0\in[f(2);+\infty[$
La fonction f est une fonction polynôme continue sur l'intervalle $[2;+\infty[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [2;+\infty[$ tel que $f(c) = 0$
Unicité
Soit $x\in R$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
Donc, pour tout $x\in]2;+\infty[$, $f'(x) > 0$
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$. On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$
2. À l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.
🖥️ **Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk**
🖥️ **Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ**
🖥️ **Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg**
🖥️ **Vidéo NumWorks https://youtu.be/4elaB1p_ADE**

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

On en déduit que $2,73 < c < 2,74$

Remarques

- Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie. On pourra en trouver une explication à cette page https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=mstsobl_2016&page_gauche=80
- Si l'on veut obtenir un arrondi à 10^{-2} près, il faut pousser la calculatrice jusqu'à une précision de 10^{-3} près. Dans l'exemple ci-dessus, on ne sait pas c est plus proche de 2,73 ou 2,74. Il faudra paramétrer un pas de 0,001 dans la calculatrice pour répondre à cette question.