تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b=ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b

خاصية1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a/b و b/c فإن a/c

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a/b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a/mb

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a/b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma/mb

تمرين محلول1: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

11 يقسم $n+5$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العدد الصحيح a يقسم عبارة $f(n)$ نستعمل تعريف قابلية القسمة

الحل:

11 يقسم

$n+5$ إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $n+5=11k$. و منه $n=11k-5$.

الحلول هي الأعداد الصحيحة من الشكل $11k-5$ مع k عدد صحيح وهي قيم n المطلوبة .

تمرين محلول2:

عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+5$ يقسم 8

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العدد الصحيح a نساوي بين $f(n)$ و قواسم a .

الحل:

مجموعة قواسم 8 هي $\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$.

$3n+5$ يقسم 8 معناه $3n+5=-8$ أو $3n+5=-4$ أو $3n+5=-2$ أو $3n+5=-1$ أو $3n+5=1$ أو $3n+5=2$ أو $3n+5=4$ أو $3n+5=8$.

أي $3n=-13$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-6$ أو $3n=-4$ أو $3n=-3$ أو $3n=-1$ أو $3n=3$.

المعادلات $3n=-13$ ، $3n=-7$ ، $3n=-4$ و $3n=-1$ ليس لها حلول .

الحلول هي الأعداد الصحيحة -3 ، -2 ، -1 ، 1 .

تمرين محلول3:

عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+8$ يقسم $n+6$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العبارة $g(n)$ نرجع المسألة إلى أن عبارة $h(n)$ تقسم عددا صحيحا a .

الحل:

ليكن n عدد صحيح حيث $3n+8$ يقسم $n+6$.ومنه $3n+8$ يقسم $3n+18$. و بالتالي $3n+8$ يقسم $(3n+18)-(3n+8)$ أي $3n+8$ يقسم 10 . مجموعة قواسم 10 هي $\{-10;-5;-2;-1;1;2;5;10\}$.

$3n+8$ يقسم 10 معناه $3n+8=-10$ أو $3n+8=-5$ أو $3n+8=-2$ أو $3n+8=-1$ أو $3n+8=1$ أو $3n+8=2$ أو $3n+8=5$ أو $3n+8=10$.

أي $3n=-18$ أو $3n=-13$ أو $3n=-10$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-3$ أو $3n=2$.

و منه $n=-6$ أو $n=-3$ أو $n=-1$

عكسيا هذه الأعداد حلولا (يكفي التعويض في $3n+8$ و $n+6$ والتأكد في كل مرة من أن $3n+8$ يقسم $n+6$).

الحلول هي الأعداد الصحيحة -6 ، -3 ، -1 .

خاصية4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a/b و a/c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb+nc$

القسمة الإقليدية في ¢

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0 \leq r < b$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

يسمى $PGCD(a;b)$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ملاحظات: $PGCD(a;a)=a$ و $PGCD(1;a)=1$

$PGCD(0;a)=a$ (a غير معدوم) .

تمرين: ليكن n عددا صحيحا.

ليكن العددان الصحيحان $a=5n-2$ و $b=2n+3$.

أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19 .

الحل:

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b . و منه d يقسم $2a-5b$ أي d يقسم $5\times(2n+3)-2\times(5n-2)$ أي d يقسم 19 .

تمرين: عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن: $4a^2-b^2=15$

الحل:

نلاحظ أنه إذا كان a و b حلين للمعادلة فإن $-a$ و $-b$ هما كذلك حلين للمعادلة إذن يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط.

و منه $4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$

$(2a-b)(2a+b)=15$

و بالتالي $2a-b$ و $2a+b$ يقسمان 15 .

بما أننا اعتبرنا $a>0$ و $b>0$ فإن $2a-b$ و $2a+b$ عددان موجبان و $2a+b>2a-b$.

مجموعة القواسم الموجبة للعدد 15 هي $\{1;3;5;15\}$.

و بالتالي $\begin{cases}2a+b=5\\2a-b=3\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a+b=15\\2a-b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$.

إذا اعتبرنا أن الحلول هي الثنائيات $(a;b)$ و انطلاقا من الملاحظة الأولى نستنتج أن الثنائيات الآتية حلول للمعادلة:

$(4;7)$ ، $(-4;-7)$ ، $(4;-7)$ ، $(-4;7)$ ، $(2;1)$ ، $(-2;1)$ ، $(2;-1)$ ، $(-2;-1)$

3. خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث a^3 يقسم b . r باقي قسمة a على b . $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$

خاصية2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس

تمرين : عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

1. $a=8700$ و $b=9150$.
2. $a=691$ و $b=2007$.
3. $a=1500$ و $b=250$.

طريقة: لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يمكن استعمال خوارزمية إقليدس و وضع النتائج في جدول

الحل:

1.

الحاصل				
المقسوم و القاسم	9150	8700	450	150
الباقي		450	150	0

إذن : $PGCD(8700;9150)=150$.

2.

الحاصل								
المقسوم و القاسم	2007	691	625	66	31	4	3	1
الباقي		625	66	31	4	3	1	0

إذن : $PGCD(691;2007)=1$.

3.

الحاصل		
المقسوم و القاسم	1500	250
الباقي		0

إذن : $PGCD(1500;250)=250$

تمرين: أوجد ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أن :

$150x+108y=6$

طريقة: لإيجاد الثنائية $(x;y)$ نستعمل خوارزمية إقليدس

الحل

الحاصل						
المقسوم و القاسم	150	108	42	24	18	6
الباقي		42	24	18	6	0

إذن : $PGCD(150;108)=6$.

أي $24-(42-24)=6$ و منه $24-18=6$

$(108-42\times 2)\times 2-42=6$ و منه. $24\times 2-42=6$

أي $108\times 2-42\times 5=6$ و منه

أي $108\times 2-(150-108)\times 5=6$ $108\times 7-150\times 5=6$

إذن $150\times(-5)+108\times 7=6$.

خاصية3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم. $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 أي $PGCD(a;b)=1$

خاصية4: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b .نضع $a=da'$ و $b=db'$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما

3. تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(|a|;|b|)$

خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم. $PGCD(ka;kb)=|k|PGCD(a;b)$

ملاحظة: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b)=|b|$

تمرين: عين كل الثنائيات $(a;b)$ **من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :**

$$\begin{cases} a+b=66 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a+b=66$ تعني $6a'+6b'=66$ و منه $a'+b'=11$

$(a';b')\in\{(1;10),(2;9),(3;8),(4;7),(5;6),(6;5),(7;4),(8;3),(9;2),(10;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي :

$\{(6;60),(12;54),(18;48),(24;42),(30;36),(36;30),(42;24),(48;18),(54;12),(60;6)\}$

تمرين: عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a\times b=900 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=5a'$ و $b=5b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a\times b=900$ تعني $5a'\times 5b'=900$ و منه $a'\times b'=36$

$(a';b')\in\{(1;36),(4;9),(9;4),(36;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي :

$\{(5;180),(20;45),(180;5),(45;20)\}$

تمرين: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 1440 - و 448 -

طريقة: لإيجاد $PGCD(-1440;-448)$ نبحث عن $PGCD(1440;448)$.

الحل

$PGCD(-1440;-448)=PGCD(1440;448)$

يمكن الملاحظة أن $1440=32\times 45$ و $448=32\times 14$

$PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)$

لنحسب $PGCD(45;14)$

الحاصل		3	4	1	2
المقسوم و القاسم	45		3	2	1
الباقي		3	2	1	0

إذن : $PGCD(45;14)=1$.

$PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)=32$

و منه $PGCD(-1440;-448)=32$

التمرين :

1. أ) أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n\in\mathbb{N}$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا للقسمة على $n+3$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. بيّن أنه ، من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$.

3. بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$

4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها

$A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

الحل:

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$(n+3)(3n^2-9n+16)=3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48$

$(n+3)(3n^2-9n+16)=3n^3-11n+48$.

بما أنّ $3n^2-9n+16$ هو مجموع أعداد صحيحة فإنه يكون عددا صحيحا وبالتالي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب) مميز كثير الحدود $3x^2-9x+16$ هو $\Delta=-111$ ومعامل x^2 هو 3 (موجب) إذن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $3x^2-9x+16>0$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. نفرض d قاسما للعددين a و b إذن d يقسم bc وبالتالي هو يقسم $bc-a$ ومنه d قاسم مشترك للعددين b و $bc-a$.

عكسيا ، نفرض d قاسما للعددين b و $bc-a$ إذن هو قاسم bc و $bc-a$ ومنه d يقسم الفرق $bc-(bc-a)$ أي d يقسم a وبالتالي d قاسم مشترك للعددين a و b .

خلاصة مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc-a$ وبالأخص

$p\gcd(a;b)=p\gcd(bc-a;b)$

3. نستعمل النتيجة السابقة بوضع : $a=48$ ، $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$

إذن $bc-a=3n^3-11n$ ومنه

$p\gcd(48;n+3)=p\gcd(3n^3-11n;n+3)$

4. أ) $48=2^4\times 3$ ، مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي :

$\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$.

ب) $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ ؛ لدينا $n+3>0$ لكي يكون $A\in\mathbb{N}$ يجب أن يكون $3n^3-11n\geq 0$ و $n+3$ يقسم $3n^3-11n$.

$3n^3-11n\geq 0$ معناه $3n\left(n^2-\dfrac{11}{3}\right)\geq 0$ ويكافئ $n=0$ أو $n\geq\sqrt{\dfrac{11}{3}}$

أي $n=0$ أو $n\geq 2$.

$n+3$ يقسم $3n^3-11n$ معناه

$p\gcd\left(3n^3-11n;n+3\right)=n+3$ ومن **3.** ينتج

$p\gcd\left(48;n+3\right)=n+3$ ويكافئ أنّ $n+3$ يقسم 48 ومعناه

$n+3\in\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$

باعتبار $n=0$ أو $n\geq 2$ نجد $n\in\{0;3;5;9;13;21;45\}$