

Lou PETITFRÈRE

I. Définition des matrices identité, diagonale et triangulaire supérieure ou inférieure ; caractérisation par leurs coefficients a_{ij}

II. Soit la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in M_3(R)$ avec
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Écrire la matrice M .
2. Calculer M^2 , M^3 et M^4 .
3. Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

III. On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1. Combien y a-t-il de quintuplets $(a; b; c; d; e)$ formés d'éléments de E ?
2. Parmi ces quintuplets, combien sont tels que a, b, c, d et e sont distincts deux à deux ?
3. Parmi ces quintuplets, combien sont tels que $a < b < c < d < e$?

Ilyas TALEB

I. Présentation du nombre de p -uplets, de p -arrangements et de p -combinaisons d'un ensemble à n éléments ; modélisation associée.

II. On considère la matrice $A = (5 \ 2 \ 1 \ 0 \ 5 \ 2 \ 0 \ 0 \ 5)$

1. Déterminer la matrice B triangulaire supérieure et le réel a tels que

$$A = aI_3 + B$$

2. Calculer B^3 .

3. En déduire A^5

III. 1. Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres ?

2. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués de 4 chiffres deux à deux distincts.

3. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués d'au moins 2 chiffres identiques.

4. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués de 4 chiffres distincts et différents de 5 et 7.

Ilayda YALIN

I. Définition d'une matrice inversible ; cas des matrices diagonales et de $M_2(R)$

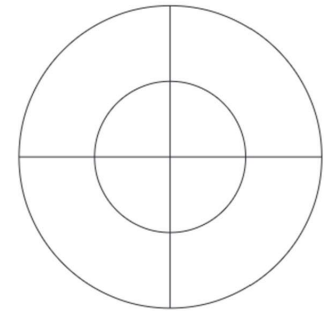
II. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in M_3(R)$ avec
$$a_{ij} = 1$$

1. Déterminer A^2

2. En déduire une expression de A^p pour tout entier $p \geq 1$.

III. La figure ci-contre est constituée de 8 cases : 4 intérieures et 4 extérieures. Pour chacun des cas suivants, déterminer de combien de façons on peut colorier la figure en respectant la consigne donnée.

1. Toute case doit être au choix noire ou blanche.
2. 4 cases sont noires et 4 cases sont blanches.
3. 3 cases sont noires, 2 cases sont blanches et 3 cases sont rouges.
4. Les cases intérieures sont au choix noires ou blanches, les cases extérieures au choix rouges ou jaunes.



Lou PETITFRÈRE

I. Définition des matrices identité, diagonale et triangulaire supérieure ou inférieure ; caractérisation par leurs coefficients $a_{i,j}$

II. Soit la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in M_3(R)$ avec

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Écrire la matrice M .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer M^2 , M^3 et M^4 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

Montrons par récurrence la proposition $P(n)$: «

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \rangle$$

Initialisation

$$M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \end{pmatrix}$$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n + 1)$.

$$M^{n+1} = M \times M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie

Conclusion

La proposition est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

III. On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1. Combien y a-t-il de quintuplets $(a; b; c; d; e)$ formés d'éléments de E ?

Le nombre de quintuplets est le cardinal de E^5 soit $9^5 = 59\,049$

2. Parmi ces quintuplets, combien sont tels que a, b, c, d et e sont distincts deux à deux ?

Il s'agit d'un tirage de 5 parmi 9 sans remise dont l'ordre compte, soit

$$A_9^5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120 \text{ quintuplets possibles}$$

3. Parmi ces quintuplets, combien sont tels que $a < b < c < d < e$?

Pour choisir les 5 nombres, il s'agit d'un tirage de 5 parmi 9 sans remise dont l'ordre ne compte pas, soit

$$(9\,5) = (9\,4) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 7 \times 2 = 126$$

Une fois les nombres choisis, l'ordre des nombres dans le quintuplet est déterminé par l'ordre croissant (donc une seule possibilité de les placer) donc il y a bien 126 quintuplets possibles.

Ilyas TALEB

I. Présentation du nombre de p -uplets, de p -arrangements et de p -combinaisons d'un ensemble n éléments ; modélisation associée.

II. On considère la matrice $A = (5\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2\ 0\ 0\ 5)$

1. Déterminer la matrice B triangulaire supérieure et le réel a tels que

$$A = aI_3 + B$$

$$A = (5\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2\ 0\ 0\ 5) = (5\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\ 5) + (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0) = 5I_3 + (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0)$$

2. Calculer B^3 .

$$B^2 = (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0)^2 = (0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$B^3 = (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0)^3 = (0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \times (0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

3. En déduire A^5

I_3 et B commutent donc

$$A^5 = (5I_3 + B)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (5I_3)^{5-k} B^k$$

$$A^5 = (5I_3)^5 + \binom{5}{1} (5I_3)^4 B + \binom{5}{2} (5I_3)^3 B^2$$

$$A^5 = 5^5 I_3 + 5^4 B + 5^4 \times 2 B^2 = 5^4 (5\ 10\ 13\ 0\ 5\ 10\ 0\ 0\ 5) = 625(5\ 10\ 13\ 0\ 5\ 10\ 0\ 0\ 5)$$

III. 1. Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres ?

Choisir un nombre à 4 chiffres revient à prendre un quadruplet dans l'ensemble $\llbracket 1; 9 \rrbracket \times \llbracket 0; 9 \rrbracket^3$ qui contient $9 \times 10^3 = 9\ 000$ quadruplets, soit autant de nombres à 4 chiffres.

2. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués de 4 chiffres deux à deux distincts.

Pour choisir un tel nombre, il s'agit d'un tirage de 1 parmi 9 pour le premier chiffre puis d'un tirage de 3 parmi 9 sans remise dont l'ordre compte pour les trois chiffres suivants, soit

$$9 \times A_9^3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\ 536 \text{ nombres possibles}$$

3. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués d'au moins 2 chiffres identiques.

D'après les questions précédentes, il y a $9\ 000 - 4\ 536 = 4\ 464$ nombres à 4 chiffres ayant au moins deux chiffres identiques

4. Parmi les nombres précédents, déterminer ceux constitués de 4 chiffres distincts et différents de 5 et 7.

Le raisonnement est identique à celui de la question 2 sauf qu'il s'agit d'un tirage parmi 7, soit

$$7 \times A_7^3 = 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\ 470 \text{ nombres possibles}$$

Ilayda YALIN

I. Définition d'une matrice inversible ; cas des matrices diagonales et de $M_2(R)$

II. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in M_3(R)$ avec

$$a_{i,j} = 1$$

1. Déterminer A^2

$$A^2 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^2 = (3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3)$$

2. En déduire une expression de A^p pour tout entier $p \geq 1$.

Montrons par récurrence la proposition $P(p)$: «

$$A^p = (3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1})$$

Initialisation

$$A^1 = A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) = (3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1}\ 3^{1-1})$$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Supposons $P(p)$ vraie et montrons $P(p + 1)$.

$$A^{p+1} = A \times A^p = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)(3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}) =$$

Donc $P(p + 1)$ est vraie

Conclusion

La proposition est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = (3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1}\ 3^{p-1})$$

III. La figure ci-contre est constituée de 8 cases : 4 intérieures et 4 extérieures. Pour chacun des cas suivants, déterminer de combien de façons on peut colorier la figure en respectant la consigne donnée.

1. Toute case doit être au choix noire ou blanche.

Le coloriage correspond à choisir un octuplet dans l'ensemble $\{N; B\}^8$ dont le cardinal est $2^8 = 256$

2. 4 cases sont noires et 4 cases sont blanches.

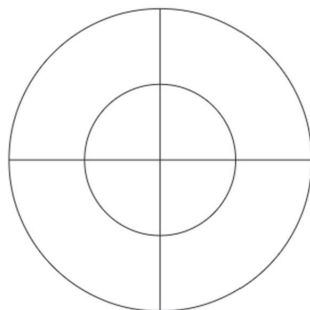
Choisir les 4 cases noires revient à faire un tirage de 4 parmi 8 sans remise dont l'ordre ne compte pas, soit

$$(8\ 4) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70 \text{ possibilités}$$

3. 3 cases sont noires, 2 cases sont blanches et 3 cases sont rouges.

Choisir les 3 cases noires revient à faire un tirage de 3 parmi 8 sans remise dont l'ordre ne compte pas, soit

$$(8\ 3) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56 \text{ possibilités}$$



Choisir les 2 cases blanches revient à faire un tirage de 2 parmi 5 sans remise dont l'ordre ne compte pas, soit

$$(5\ 2) = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{ possibilités}$$

Il ne reste alors qu'une seule possibilité pour colorier les dernières cases en rouge.

D'après le principe multiplicatif, il y a donc **560 possibilités** en tout.

4. Les cases intérieures sont au choix noires ou blanches, les cases extérieures au choix rouges ou jaunes.

Le coloriage correspond à choisir un octuplet dans l'ensemble $\{N; B\}^4 \times \{R; J\}^4$ dont le cardinal est $2^4 \times 2^4 = 256$