AI 輔助證明學習指南

清華學生的工具資源　清華學生可向計算機與通訊中心申請 @gapp.nthu.edu.tw 教育帳號。使用學校帳號登入 Gemini 時，可用功能依學校設定與授權而定。清華大學計通中心 GAPP 帳號申請與服務說明

寫證明時，可以請 AI 幫你檢查某一步是否成立，也可以在卡住時向它要一個提示。先寫出自己的想法，每次只處理一個問題，修改後再請 **AI** 檢查。 最後以你能否獨立寫出證明，判斷自己是否真的理解。

一、怎麼開始？

1. 先自己動筆。寫下題目的假設、要證明的結論，以及你想到的方法。草稿不必完整。即使只做到一半，也可以告訴 AI:「我想用哪個定義？我做到哪一步？接下來卡在哪裡？」
2. 說明這一題可以用什麼。告訴 AI 目前的課程進度，以及題目有沒有指定方法。例如:「這週只學到開集與鄰域的定義，這題要求由定義證明。」如果你不確定某個定理是否學過，可以貼上講義中的相關段落。
3. 選一個模板。平常練習、只想知道下一步該改哪裡，用簡要版。已經寫完整份證明、想從頭檢查，用詳細版。兩個模板擇一即可。
4. 收到提示後，先自己改。改完可以問:「我把第三行改成下面這樣，原本的問題解決了嗎？」若第一個提示還不夠，再請 AI 給一個更具體的提示。

二、簡要版模板（日常練習用）

複製以下文字，填入【 】中的內容。

> 請擔任我的微積分或高等微積分助教，只使用我們已學過、且本題允許的方法。先讀完題目和我的草稿，沿著我的想法檢查。
>
> 如果有錯誤或缺少關鍵理由，請每次只指出最先需要修改的一處，最多回覆三行。
> 位置:指出草稿中的哪一句或哪一步。
> 原因:用一句話說明這一步有什麼問題。
> 提示:只問我一個能幫助我自己修正的問題，然後等我回答。
>
> 如果我只寫到一半，而已寫的步驟都成立，只給我一個下一步的提示。如果證明已完整且正確，只回覆「目前沒有發現需要修改的地方」。如果照片或符號看不清楚，只問我需要補充哪一行。
>
> 請省略題目重述、其他解法與完整證明。
>
> 目前已學到／尚未學到:【填寫與本題有關的內容】
> 題目與方法限制:【貼上題目，註明是否要求由定義證明或指定方法】
> 我的草稿或卡住的地方:【貼上文字或附上照片】

三、詳細版模板（完整證明寫完後使用）

請擔任我的微積分或高等微積分助教，依照題目要求與目前課程進度，從頭檢查我的證明。請優先檢查以下幾點。

1. 推理是否成立？ 每個關鍵步驟能否由前面的內容推出？是否只證明了反方向，或直接引用待證的結果？即使某個定理已經學過，也請檢查用它是否會造成循環論證。

2. 定理是否適用？ 我在哪一步用了哪個定理？所需條件是否已由題目給定，或已在前面證明？

3. 選取的對象是否有根據？ 若我選了一個點、一個序列或一個 δ，能否看出為什麼可以這樣選？「任意」與「存在」的順序是否正確？

4. 有沒有遺漏的情況？ 例如，除以某個量之前是否確認它不為零？證明「若且唯若」時，兩個方向是否都已完成？

回覆時，請先用一句話說明整體判斷，再依重要性列出問題。每項都請指出草稿中的具體位置，並標明是「數學錯誤」、「需要補充理由」或「表達建議」。若有多處問題，先給最重要的一處提示，讓我自己修改。若證明已經成立，請直接說明；其他寫法只列為建議。請保留我的證明方法，不必重寫整份解答。

目前已學到／尚未學到：【填寫與本題有關的內容】
題目與方法限制：【貼上題目及限制】
我的完整證明：【貼上文字或附上照片】

四、討論途中可直接使用的短指令

遇到的情況	可以直接對 **AI** 說
回答太長	「請縮成兩句。第一句指出最先該改的地方和原因，第二句給一個提示，然後等我修改。」
AI 用了還沒教的定理	「我們還沒學到連續函數。請只用開集的鄰域定義，重新檢查我寫的第二步。」
知道要用哪個工具，但卡在計算	「我想用三角不等式估計這個距離。請只提示我可以怎麼拆項，剩下讓我算。」
想確認自己的寫法是否足夠	「你說第三行需要修改。請指出是推論不成立、少了一個理由，還是只是可以寫得更清楚。」
AI 建議改用另一種證法	「請先沿著我的方法檢查。如果這條路走不通，請指出第一個無法成立的步驟。」
想檢查書寫或特殊情況	「請只檢查變數是否交代清楚，以及有沒有漏掉端點或分母為零的情況。每項只說一句。」

五、怎麼確認自己真的學會了？

關掉對話，從題目重新寫一次證明。寫到曾經卡住的那一步時，試著用自己的話說明：「這一步用了哪個假設或定理？為什麼在這裡可以用？」如果還說不清楚，就回到那一步，對照定義、講義或課堂例題。

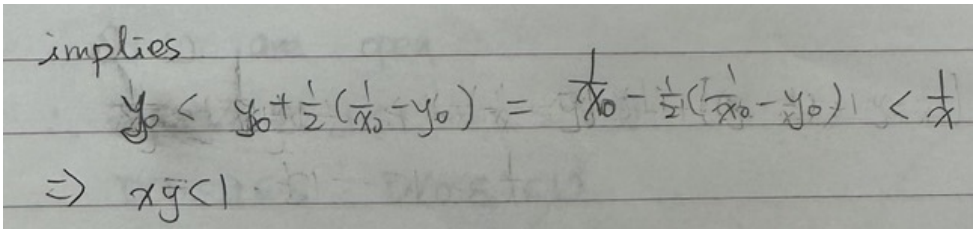
若 AI 認為某一步有錯，但你不同意，可以追問：「請指出哪一個條件沒有滿足，或給一個反例說明這個推論為什麼不成立。」再自行檢查它的理由。若仍有疑問，帶著題目、你的原稿，以及有爭議的那一步詢問老師或助教。關於作業或考試的評分，請以課程說明及老師、助教的回饋為準。

六、實際範例：拿自己的手稿和 AI 討論

廖軒毅老師的話　下面兩個範例取自我在學生時代寫的高等微積分作業。這次把當年的手稿和 Gemini 的回覆放在一起，讓大家練習檢查 AI 給的建議。

範例一　把長回覆縮成一個有用的問題

題目與草稿　要證明 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ 是開集。在 $x_0 > 0$ 的情況下，我在手稿中從 $y < 1/x$ 推出 $xy < 1$。把不等式兩邊同乘 x 時，用到了哪個條件？



手稿節錄 1　第二張照片左欄，從 $y < 1/x$ 到 $xy < 1$。

補充進度。這次示範使用詳細版模板，起初寫「尚未學到連續函數」，Gemini 因此建議從代數估計做起。接著補充已學過單變數連續函數，還沒學到連續函數與開集的關係。Gemini 隨即改判：草稿可以保留 $1/x$ 在非零點連續的那一步。

接著追問（對話原文）「請縮成兩句。第一句指出最先該改的地方和原因，第二句給一個提示，然後等我修改。」

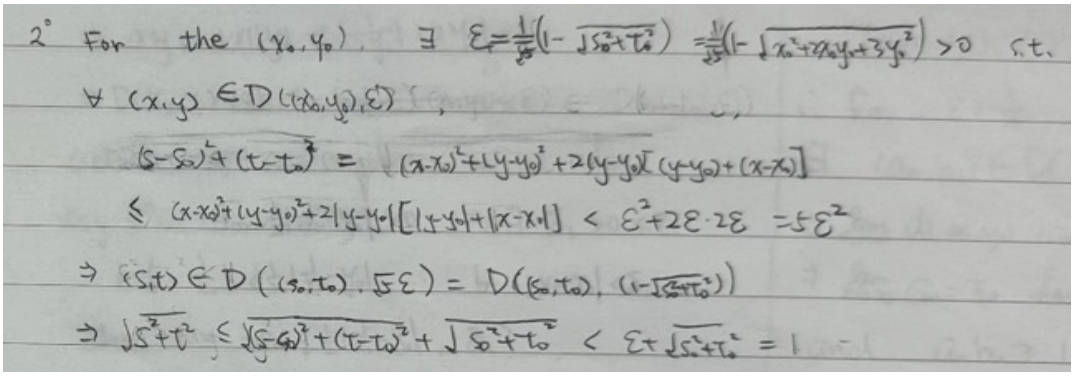
> 兩句提示（依原對話改寫）　從 $y < 1/x$ 推出 $xy < 1$ 時，你用到了 $x > 0$。若中心的 x 座標是 $x_0 > 0$，你會怎麼選半徑，讓球裡每個點的 x 座標都在 0 的右邊？

自己驗算 **AI** 提的反例。Gemini 聲稱 $\delta_1 = 1.26$ 可保證所有滿足 $|x - 1| < \delta_1$ 的非零 x 都有 $|1/x - 1| < 5.5$。代入 $x = 0.1$：它與 1 的距離是 0.9，但倒數與 1 的距離是 9。這個 δ_1 不符合假設，反例無效。

回到草稿。對原稿中的 $x_0 > 0$，符合倒數連續性估計的 δ_1 必小於 x_0，否則正數 x 可任意接近 0，使 $1/x$ 任意大。想把正號的理由寫得更直接，也可以把原來的半徑限制為至多 $x_0/2$。請自己補上保證 $x > 0$ 的那一行。

範例二　**AI** 說你算錯時，先核對它讀到的式子

題目與草稿　同一題還要求證明 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 3y^2 < 1\}$ 是開集。我在手稿中令 $s = x + y$、$t = \sqrt{2} \cdot y$，於是原來的不等式成為 $s^2 + t^2 < 1$。以下用 ρ_0 表示中心 (s_0, t_0) 到原點的距離。



手稿節錄 2　第一張照片右欄。比對第一行選的 ε，以及最後兩行的半徑。

先核對原稿。Gemini 把草稿中的係數讀成 1/10，於是判斷最後的等號不能成立。我當時取的是 $\varepsilon = (1 - \rho_0)/\sqrt{5}$，而且已經估出 (s, t) 到 (s_0, t_0) 的距離小於 $\sqrt{5} \cdot \varepsilon$。

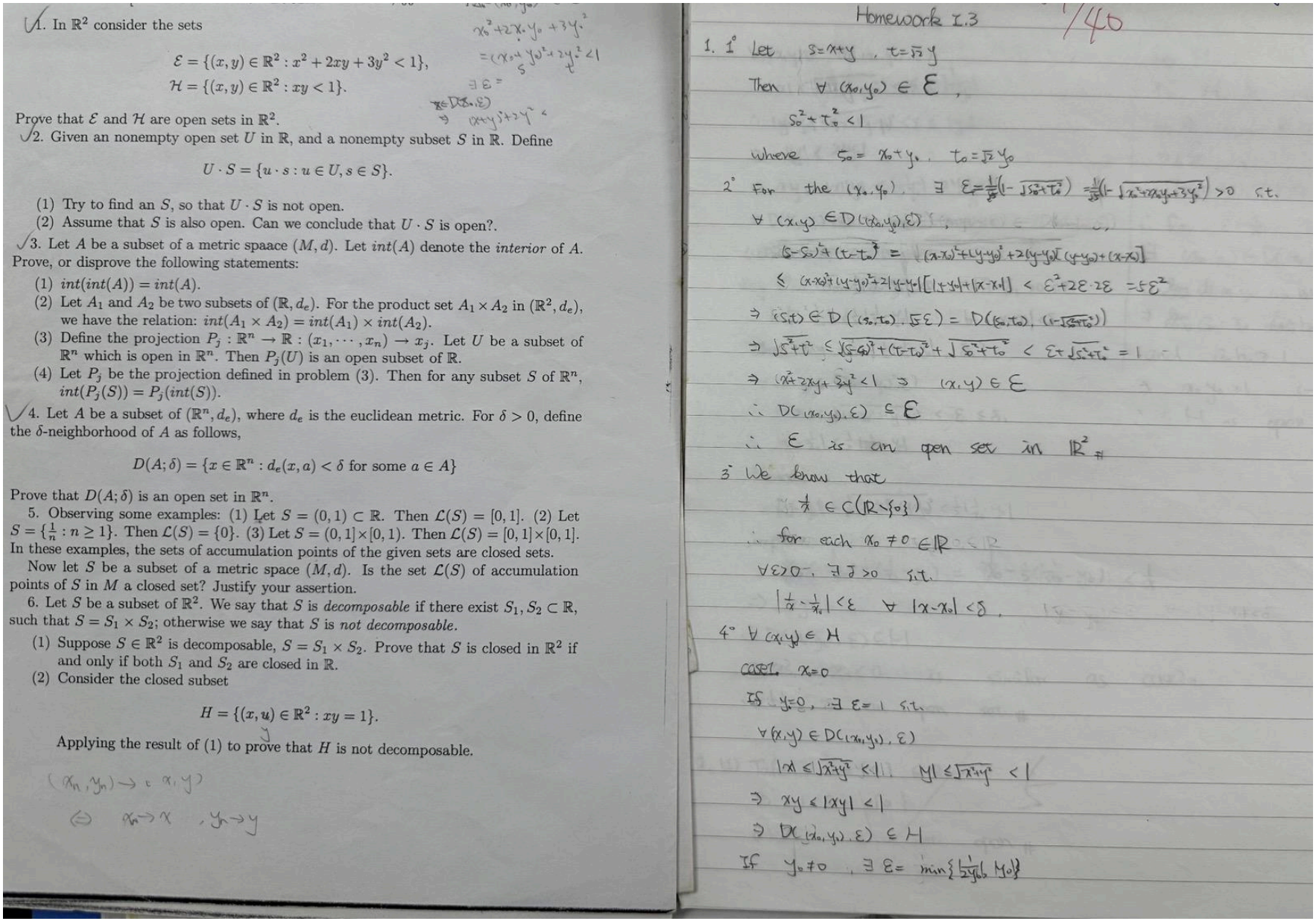
再決定要改哪裡。最後一行用三角不等式時，我把 $\sqrt{5} \cdot \varepsilon$ 寫成了 ε。把 $\sqrt{5}$ 補回來，就有 $\sqrt{(s^2 + t^2)} < \sqrt{5} \cdot \varepsilon + \rho_0 = 1$。原來選的半徑可以保留。

> 下次可以這樣問 「請先打出你從照片讀到的 ε，以及你認為有問題的那一行，讓我核對符號，再給一個提示。」

對話節錄自本次示範的 Gemini 紀錄《微積分證明檢查與修正指導》。

附錄　廖軒毅老師的高等微積分作業原稿

原稿一　題目與作答首頁



1. In $\mathbb{R}^2$ consider the sets

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 3y^2 < 1\},$$
$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}.$$

Prove that $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ are open sets in $\mathbb{R}^2$.

2. Given an nonempty open set U in $\mathbb{R}$, and a nonempty subset S in $\mathbb{R}$. Define

$$U \cdot S = \{u \cdot s : u \in U, s \in S\}.$$

(1) Try to find an S, so that $U \cdot S$ is not open.
(2) Assume that S is also open. Can we conclude that $U \cdot S$ is open?.

3. Let A be a subset of a metric spaace (M,d). Let $int(A)$ denote the *interior* of A. Prove, or disprove the following statements:

(1) $int(int(A)) = int(A)$.
(2) Let A_1 and A_2 be two subsets of $(\mathbb{R}, d_e)$. For the product set $A_1 \times A_2$ in $(\mathbb{R}^2, d_e)$, we have the relation: $int(A_1 \times A_2) = int(A_1) \times int(A_2)$.
(3) Define the projection $P_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \cdots, x_n) \to x_j$. Let U be a subset of $\mathbb{R}^n$ which is open in $\mathbb{R}^n$. Then $P_j(U)$ is an open subset of $\mathbb{R}$.
(4) Let P_j be the projection defined in problem (3). Then for any subset S of $\mathbb{R}^n$, $int(P_j(S)) = P_j(int(S))$.

4. Let A be a subset of $(\mathbb{R}^n, d_e)$, where d_e is the euclidean metric. For $\delta > 0$, define the δ-neighborhood of A as follows,

$$D(A;\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_e(x,a) < \delta \text{ for some } a \in A\}$$

Prove that $D(A;\delta)$ is an open set in $\mathbb{R}^n$.

5. Observing some examples: (1) Let $S = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Then $\mathcal{L}(S) = [0,1]$. (2) Let $S = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. Then $\mathcal{L}(S) = \{0\}$. (3) Let $S = (0,1] \times [0,1)$. Then $\mathcal{L}(S) = [0,1] \times [0,1]$. In these examples, the sets of accumulation points of the given sets are closed sets.

Now let S be a subset of a metric space (M,d). Is the set $\mathcal{L}(S)$ of accumulation points of S in M a closed set? Justify your assertion.

6. Let S be a subset of $\mathbb{R}^2$. We say that S is *decomposable* if there exist $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$, such that $S = S_1 \times S_2$; otherwise we say that S is *not decomposable*.

(1) Suppose $S \in \mathbb{R}^2$ is decomposable, $S = S_1 \times S_2$. Prove that S is closed in $\mathbb{R}^2$ if and only if both S_1 and S_2 are closed in $\mathbb{R}$.
(2) Consider the closed subset

$$H = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

Applying the result of (1) to prove that H is not decomposable.

Homework I.3

1. 1° Let $s = x+y$, $t = \sqrt{2}y$

Then $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{E}$,

$s_0^2 + t_0^2 < 1$

where $s_0 = x_0 + y_0$, $t_0 = \sqrt{2}y_0$

2° For the (x_0,y_0), $\exists\ \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{s_0^2+t_0^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{x_0^2+2x_0y_0+3y_0^2}) > 0$ s.t.

$\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),\varepsilon)$,

$(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2(y-y_0)(y-y_0+(x-x_0))$

$\leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2|y-y_0|[|y-y_0| + |x-x_0|] < \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot 2\varepsilon = 5\varepsilon^2$

$\Rightarrow (s,t) \in D((s_0,t_0), \sqrt{5}\varepsilon) = D((s_0,t_0), (1-\sqrt{s_0^2+t_0^2}))$

$\Rightarrow \sqrt{s^2+t^2} \leq \sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2} + \sqrt{s_0^2+t_0^2} < \varepsilon + \sqrt{s_0^2+t_0^2} = 1$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + 3y^2 < 1 \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{E}$

$\therefore D((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq \mathcal{E}$

$\therefore \mathcal{E}$ is an open set in $\mathbb{R}^2$.

3° We know that

$\frac{1}{x} \in C(\mathbb{R} - \{0\})$

$\therefore$ for each $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ s.t.

$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| < \varepsilon \quad \forall\ |x - x_0| < \delta$.

4° $\forall (x,y) \in H$

case1. $x = 0$

If $y = 0$, $\exists\ \varepsilon = 1$ s.t.

$\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),\varepsilon)$

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < 1$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < 1$

$\Rightarrow |xy| \leq |xy| < 1$

$\Rightarrow D((x_0,y_0),\varepsilon) \in H$

If $y_0 \neq 0$, $\exists\ \varepsilon = \min\{\frac{1}{2|y_0|}, M_0\}$

國立清華大學

系級 _____

學號 _____

姓名 _____

$\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),\varepsilon)$

$|x| \le \sqrt{x^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon \le \frac{1}{2}|y_0|$

$|y-y_0| \le \sqrt{x^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon \le |y_0|$

$\Rightarrow |y| < 2|y_0|$

$\Rightarrow xy \le |x||y| < \left(\frac{1}{2y_0}\right)|2y_0| = 1$

$\Rightarrow D((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq H$

case2. $x_0 > 0$,

By 3°, for $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_0}-y_0\right| > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ s.t.

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_0}-y_0\right|$ $\forall\ |x-x_0| < \delta_1$

Take $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_0}-y_0\right|, \delta_1\right\}$,

$\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),\varepsilon)$

$|x-x_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon \le \delta_1$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_0}-y_0\right|$

Hence,

$|y-y_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x_0}-y_0\right|$

implies

$y_0 < y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}-y_0\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}-y_0\right) < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy < 1$

$\therefore D((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq H$

case3. $x_0 < 0$ is similar as case2.

$\therefore H$ is an open set #

For H,

If H is not open

$\Rightarrow \exists\ (x_0,y_0) \in H$ s.t.

$\forall \varepsilon > 0$,

$D((x_0,y_0);\varepsilon) \cap H^c \neq \phi$

$\therefore$ for $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

$\exists\ (a_n,b_n) \in D((x_0,y_0);\frac{1}{n}) \cap H^c$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d((x_0,y_0),(a_n,b_n)) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ $\lim_{n\to\infty} b_n = y_0$

and $a_n b_n \ge 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_0 y_0 \ge 1$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore H$ is open #

2. (1) Take $S = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \cup S = \{0\}$

which is not open #

附錄二　Gemini 對話完整紀錄

以下依原始紀錄順序附上完整對話，供讀者核對第六節的整理與分析。

微積分證明檢查與修正指導

https://gemini.google.com/app/59ccd1e91b2ca91c

User prompt: 請擔任我的微積分或高等微積分助教，依照題目要求與目前課程進度，從頭檢查我的證明。請優先檢查以下幾點。 1. 推理是否成立？ 每個關鍵步驟能否由前面的內容推出？是否只證明了反方向，或直接引用待證的結果？即使某個定理已經學過，也請檢查用它是否會造成循環論證。 2. 定理是否適用？ 我在哪一步用了哪個定理？所需條件是否已由題目給定，或已在前面證明？ 3. 選取的對象是否有根據？ 若我選了一個點、一個序列或一個 δ，能否看出為什麼可以這樣選？「任意」與「存在」的順序是否正確？ 4. 有沒有遺漏的情況？ 例如，除以某個量之前是否確認它不為零？證明「若且唯若」時，兩個方向是否都已完成？ 回覆時，請先用一句話說明整體判斷，再依重要性列出問題。每項都請指出草稿中的具體位置，並標明是「數學錯誤」、「需要補充理由」或「表達建議」。若有多處問題，先給最重要的一處提示，讓我自己修改。若證明已經成立，請直接說明；其他寫法只列為建議。請保留我的證明方法，不必重寫整份解答。 目前已學到 / 尚未學到：尚未學到連續函數

Response: 第 1 題的整體證明架構與方向正確（尤其第 2 頁右側用序列的反證法與第 2(1) 題皆成立），但第 1 題主要的直接證明中存在**引用尚未學到的連續性定理**、**未排除分母為零與負號變號**以及**不等式放縮筆誤**等問題，修正後才會完整嚴謹。

問題清單（依重要性排序）

1. **第 1 題 3°（第 1 頁右欄中下方，`We know that 1/x \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})...`）—「需要補充理由」**
    - **問題點**：你直接引用了「$\frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上連續」來取得 ε-δ 性質。但依照目前進度**尚未學到連續函數**，不能直接將連續性當作已知定理使用，必須直接透過絕對值不等式來構造出對應的 δ。
2. **第 1 題 3° 與 4° Case 2（第 1 頁右欄底部至第 2 頁左欄中段，`Take \varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0}-y_0|, \delta_1\}` 至 `\Rightarrow xy < 1`）—「數學錯誤」**
    - **問題點**：這裡有兩個連帶的遺漏：
        - 在 3° 寫 `\forall |x - x_0| < \delta` 時，沒有排除 $x = 0$（當 $\delta \geq |x_0|$ 時，$x = 0$ 會落在範圍內導致 $\frac{1}{x}$ 無意義）。
        - 在 Case 2（$x_0 > 0$）最後一步，你從 $y < \frac{1}{x}$ 兩邊同乘 x 得到 $xy < 1$，這**必須在 $x > 0$ 時才成立**（若 $x < 0$，不等號方向會反轉）。但你取的 $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0} - y_0|, \delta_1\}$ 並未限制 $\varepsilon \leq x_0$，無法保證 $D((x_0, y_0), \varepsilon)$ 內的點都滿足 $x > 0$。例如取 $(x_0, y_0) = (1, -10) \in \mathcal{H}$，即使 $|\frac{1}{x} - 1| < 5.5$，仍可能取到 $x = -0.25 < 0$，此時 $y = -10 < -4 = \frac{1}{x}$，但 $xy = 2.5 > 1$。
3. **第 1 題 2°（第 1 頁右欄上半部第 10 行，`\Rightarrow \sqrt{s^2+t^2} \le \sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2} + \sqrt{s_0^2+t_0^2} < \varepsilon + \sqrt{s_0^2+t_0^2} = 1`）—「數學錯誤」**

- **問題點**：這一行有兩處計算錯誤：
  - 前一行已推出 $(s,t) \in D((s_0,t_0),\quad 5\varepsilon)$，因此 $\quad(s-s_0)^2+(t-t_0)^2$ 的上界是 $\quad 5\varepsilon$ 而非 ε（因為 $\quad 5>1$，$\quad 5\varepsilon>\varepsilon$，不能直接縮小成 ε）。
  - 因為前面令 $\varepsilon=\frac{1}{10}(1-\quad s_0^2+t_0^2)$，所以 $\varepsilon+\quad s_0^2+t_0^2$ 並**不等於** 1，而是嚴格小於 1；應保留 $\quad 5\varepsilon+\quad s_0^2+t_0^2$ 並代入 ε 的定義，利用 $\frac{5}{10}<1$ 說明它嚴格小於 1。

4. **第 1 題 4° Case 2 與 Case 3（第 2 頁左欄中下方）—「需要補充理由」**
   - **問題點**：
     - 在 Case 2 一開始直接寫 `for \frac{1}{2}|\frac{1}{x_0}-y_0| > 0`，建議補一句說明：因為 $(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ 且 $x_0>0$，故 $y_0<\frac{1}{x_0}$，確保該量嚴格大於 0。
     - Case 3（$x_0<0$）只寫 `is similar as case 2`，但 $x_0<0$ 時不等號方向相反（變成 $y_0>\frac{1}{x_0}$，且需保證 $x<0$ 才能從 $y>\frac{1}{x}$ 推出 $xy<1$），稍微補充不等號反轉或變數變換的對稱性會更完整。
5. **第 2 頁右欄（`For H. If H is not open...`）與第 2 頁左下（`2. (1)`）—「表達建議」**
   - **問題點**：
     - 第 2 頁右欄其實已經用序列反證法寫出了 $\mathcal{H}$ 為開集的**另一個完整證明**（這個方法避開了連續函數與除法分母的問題，推理本身完全成立），但沒有標註「另證（Alternative Proof）」，容易讓批改者與左欄混淆；另外最後一步 `x_0 y_0 \ge 1 (\rightarrow\leftarrow)` 建議補上「與 $(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$（即 $x_0y_0<1$）矛盾」。
     - 第 2(1) 題取 $S=\{0\}$ 很精準，建議補一句「因為題目給定 $U\neq\emptyset$，故 $U\cdot\{0\}=\{0\}$，且單點集 $\{0\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中不是開集」。

最重要問題的修改提示（針對問題 1 與問題 2）

要拿掉 3° 對連續函數的依賴，你可以直接把 $|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}|$ 通分化簡成 $\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}$。為了控制分母 $|x|$ 不會太小（同時解決問題 2 中需要 $x>0$ 的條件），在固定 $x_0>0$ 時，先強制限制 $|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$：這樣一來不但能保證 $x>\frac{x_0}{2}>0$，還能得到 $\frac{1}{|x|}<\frac{2}{x_0}$ 的上界，接著就能反推出 δ_1 要取多小了。

你想先試著修改第 3° 步的 δ 選法與 2° 的不等式放縮，再貼上來讓我幫你確認嗎？

User prompt: 以學到單變數的連續函數，但沒有學到open跟連續函數的關係

Response: 在已學過單變數連續函數的前提下，你第 3° 步直接引用 $\frac{1}{x}$ 的連續性完全合理且不涉及循環論證，但第 1 題的直接證明仍有**未確保 $x > 0$（及定義域 $x \neq 0$）導致乘法變號**與**不等式放縮筆誤**兩處數學錯誤需要修正。

問題清單（依重要性排序）

1. **第 1 題 4° Case 2 與 3°（第 1 頁右欄底部至第 2 頁左欄中段，`Take \varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0}-y_0|, \delta_1\}` 至 `\Rightarrow xy < 1`）— 「數學錯誤」**
   - **問題點**：即使可以直接使用單變數函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的連續性，連續性的 ε-δ 定義仍只適用於**定義域內的點**，因此 3° 寫 `\forall |x - x_0| < \delta` 時必須加上 $x \neq 0$（否則當 $\delta \geq |x_0|$ 時會包含 $x = 0$）。
   - 更關鍵的是，在 Case 2（$x_0 > 0$）中，僅取 $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0} - y_0|, \delta_1\}$ 並**不能保證 $D((x_0, y_0), \varepsilon)$ 內的點都滿足 $x > 0$**。舉個反例：取 $(x_0, y_0) = (1, -10) \in \mathcal{H}$，此時 $\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0} - y_0| = 5.5$；在定義域 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上，只要 $x \in (-0.26, 0) \cup (0, 2.26)$ 就滿足 $|\frac{1}{x} - 1| < 5.5$，因此 $\delta_1 = 1.26$ 是合法的選取。但若只取 $\varepsilon = \min\{5.5, 1.26\} = 1.26$，點 $(x, y) = (-0.25, -10)$ 就會落在 $D((1, -10), \varepsilon)$ 內，且確實滿足 $y < \frac{1}{x}$（$-10 < -4$）；然而因為 $x = -0.25 < 0$，最後一步將 $y < \frac{1}{x}$ 兩邊同乘 x 時不等號會反轉，反而得到 $xy = 2.5 > 1$。
2. **第 1 題 2°（第 1 頁右欄上半部第 10 行，`\Rightarrow \sqrt{s^2+t^2} \le \sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2} + \sqrt{s_0^2+t_0^2} < \varepsilon + \sqrt{s_0^2+t_0^2} = 1`）— 「數學錯誤」**
   - **問題點**：這裡有兩處計算錯誤：
     - 前一行已推出 $(s, t) \in D((s_0, t_0), \quad 5\varepsilon)$，因此 $\quad (s - s_0)^2 + (t - t_0)^2$ 的上界是 $\quad 5\varepsilon$ 而非 ε（因為 $\quad 5 > 1$，$\quad 5\varepsilon > \varepsilon$，不能直接把上界縮小成 ε）。
     - 前面令 $\varepsilon = \frac{1}{10}(1 - \quad s_0^2 + t_0^2)$，因此 $\varepsilon + \quad s_0^2 + t_0^2$ 並**不等於** 1，而是嚴格小於 1；應保留 $\quad 5\varepsilon + \quad s_0^2 + t_0^2$ 並代入 ε 的定義，利用 $\frac{5}{10} < 1$ 說明它嚴格小於 1。
3. **第 1 題 4° Case 2 與 Case 3（第 2 頁左欄中下方）— 「需要補充理由」**
   - **問題點**：
     - 在 Case 2 一開始使用 $\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0} - y_0| > 0$ 作為連續性定義中的正數時，建議補一句說明：因為 $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ 且 $x_0 > 0$，故 $y_0 < \frac{1}{x_0}$，確保該量嚴格大於 0。
     - Case 3（$x_0 < 0$）只寫 `is similar as case 2`，但 $x_0 < 0$ 時不等號方向相反（變成 $y_0 > \frac{1}{x_0}$，且需保證 $x < 0$ 才能從 $y > \frac{1}{x}$ 推出 $xy < 1$），稍微補

充不等號反轉或對稱性會更完整。

4. **第 2 頁右欄（For H. If H is not open...）與第 2 頁左下（2. (1)）—「表達建議」**
    - **問題點**：
        - 第 2 頁右欄其實已經用序列反證法寫出了 $\mathcal{H}$ 為開集的**另一個完整證明**（這個寫法避開了連續函數與除法分母的問題，推理本身完全成立），建議在開頭標註 `Alternative Proof` 與左欄區隔；另外最後一步 `x_0 y_0 \ge 1 (\rightarrow\leftarrow)` 建議補上「與 $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$（即 $x_0 y_0 < 1$）矛盾」。
        - 第 2(1) 題取 $S = \{0\}$ 很精準，建議補一句「因為題目給定 $U \neq \emptyset$，故 $U \cdot \{0\} = \{0\}$，且單點集 $\{0\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中不是開集」。

最重要問題的修改提示（針對問題 1）

你可以完全保留 3° 利用單變數連續函數的寫法，只需做兩處微調：

1. 在 3° 的 `\forall |x - x_0| < \delta` 補上 $x \neq 0$（或寫 `\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ with } |x - x_0| < \delta`），讓敘述嚴格符合 $1/x$ 的定義域。
2. 在 4° Case 2（$x_0 > 0$）選取 ε 時，把 x_0（或 $\frac{x_0}{2}$）也放進 $\min\{\dots\}$ 裡面。這樣一來，$|x - x_0| < \varepsilon \leq x_0$ 就會同時保證 $x > 0$——不僅自動排除了 $x = 0$（確保 x 落在 3° 的定義域內），也能安全地將 $y < \frac{1}{x}$ 兩邊同乘 x 得到 $xy < 1$。

你想先試著修改這兩處（以及 2° 的不等式放縮）再傳上來讓我確認嗎？

User prompt: 「請縮成兩句。第一句指出最先該改的地方和原因，第二句給一個提示，然後等我修改。」

Response: 最先該改的是第 1 題 3° 底部到 4° Case 2 的部分，因為 3° 寫 $\forall |x - x_0| < \delta$ 時未排除分母 $x = 0$，且 Case 2（$x_0 > 0$）僅取 $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|\frac{1}{x_0} - y_0|, \delta_1\}$ 無法保證鄰域內的點都滿足 $x > 0$，會導致最後一步將 $y < \frac{1}{x}$ 兩邊同乘 x 時不等號可能反轉。提示是在 3° 的條件中補上 $x \neq 0$（符合 $\frac{1}{x}$ 的定義域），並在 Case 2 選取 ε 時把 x_0 一併放進 $\min\{\dots\}$ 裡以強制確保 $x > 0$，請先試著修改這處再貼上來讓我確認！
