

Premier problème : Echelle contre un mur.

1) Système: l'échelle. Référentiel : le labo, galiléen.

Actions subies par le système : a) Forces données le poids $-Py$

b) Forces de contact en A $ax + ay$ ($|\frac{a}{\alpha}| \leq f$)

en B $\beta x + by$ ($|\frac{b}{\beta}| \leq f$)

Le problème est plan. L'équilibre est obtenu lorsque le torseur des actions de contact est nul.

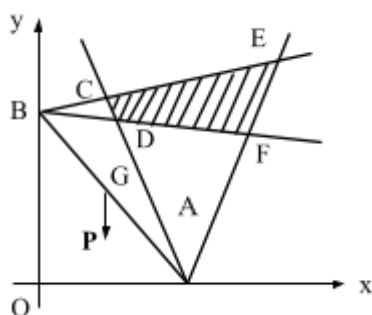
Résultante : $-Py + ax + ay + \beta x + by = 0$ soit $a + \beta = 0$ et $\alpha + b = P$

Moment nul en tout point, soit O par exemple: $\alpha \sin \theta = \beta \cos \theta + \frac{P}{2} \sin \theta$

On obtient donc 3 relations. Si on se fixe θ il reste 4 inconnues. L'équilibre étant réalisé les actions de contact ne peuvent être prédites: il existe un domaine de valeurs possibles dépendant des coefficients de frottement f et g , qui assure l'équilibre. Cette impossibilité de prédiction des actions de contact est liée à l'insuffisance du modèle purement phénoménologique qui conduit aux lois de Coulomb. Une connaissance très fine des surfaces en contact et une connaissance des interactions microscopiques permettraient (peut-être!) une prédiction plus précise.

2)

Si le système soumis à 3 forces coplanaires est en équilibre, nécessairement les forces sont concourantes. Cela n'est possible que si la verticale passant par G coupe la quadrilatère CDEF construit à partir des cônes de frottement.



a) A la limite du glissement P passe par G et C.

$a = -f\alpha$ et $b = g\beta$. On a 2 équations supplémentaires, donc 5 équations. Cette situation, à la limite du glissement, ne peut en réalité se produire que pour une seule valeur de θ

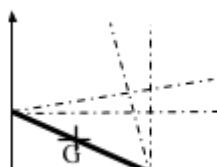
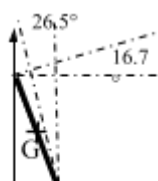
b) On a donc maintenant 5 inconnues a, b, α, β , et θ . On résout en $\theta \quad \tan \theta = \frac{2}{-g+1f}$

c) $f=0.5 \quad \tan \phi = 0.5 \quad \text{donc } \phi = 26.5^\circ \quad g=0.3 \quad \tan \gamma = 0.3 \quad \text{donc } \gamma = 16.7^\circ$

angle de 30° : l'échelle reste en équilibre; **angle de 70° :** pas d'équilibre possible, l'échelle glisse.



d) Avec $g=3 \quad \tan \gamma = 3 \quad \text{et } \gamma = 71.6^\circ$ (ceci conduit à $\theta < 0$). En raison du frottement important sur le mur l'échelle sera toujours en équilibre et ne glissera jamais.



Deuxième problème : Disque chargé.

A) Potentiel et champ au voisinage du bord d'un conducteur mince.

1) $V(r, \theta, z) = V_0 + f(r) \cdot g(\theta)$. La fonction $g(\theta)$ doit être telle que $g(\theta) = g(2\pi - \theta)$ en raison de la symétrie du problème.

$E_r = -g'f'$ $E_\theta = -\frac{1}{r}fg'$ $E_z = 0$ D'autre part $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ (Expression exprimant localement le théorème de Gauss.)

$0 = \frac{1}{r}g(f' + rf'') + \{ \frac{1}{r} \text{ over } \{f\} \} \text{ital fg}$ soit en séparant les variables $\frac{r^2 f + f'r}{g} = - \frac{1}{g} \{g\} = K$

K constante positive puisque g doit être périodique.

2) si $\theta=0$ $E_r=0$ (Le demi plan est équipotentiel) donc $g(0)=0$ et $g(2\pi)=0$

Résolution $g = a \cos \sqrt{K}q + b \sin \sqrt{K}q$ $g(0)=0 \Rightarrow a = 0$ $g(2p) = 0 \Rightarrow \sin 2p\sqrt{K} = 0$
donc $4K=p^2$ avec p entier. A priori on a donc $g = b \sin(\frac{pq}{2})$.

Si $p = 1$, g ne s'annule que pour $\theta = 0$ ou 2π ce qui donne à V la périodicité souhaitée.

Si $p \neq 1$, g s'annule pour $q = \frac{2p}{p}$ ce qui est inacceptable. En effet les lignes de champ partent du plan et aboutissent à l'infini, or le long d'une ligne de champ la fonction V doit être à variation monotone. Donc finalement $K = \frac{1}{4}$ et $\sqrt{K} = \frac{1}{2}$.

3) $f(r)=r^t$ $t(t-1) + t = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$ ce qui donne deux solutions possibles.

$V = V_0 - b(\sin \frac{q}{2})\sqrt{r}$ ou $V = V_0 - b \frac{\sin \frac{q}{2}}{\sqrt{r}}$ mais la seconde conduirait à $V \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 0$ ce qui ne correspond pas à la réalité.

4) Considérons l'équipotentielle telle que $V=V_1$ si $\theta = \pi$ et $r = r_1$. L'équation générale des équipotentielles s'écrit

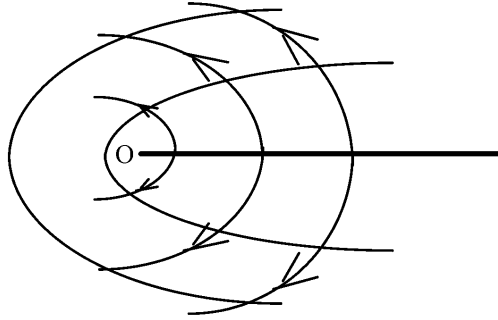
$V = V_0 + (V_1 - V_0)\sqrt{\frac{r}{r_1}} \sin \frac{q}{2}$. Prenons l'équation $V = V_1$ alors $r = \frac{r_1}{\sin^2 \frac{q}{2}} = \frac{2r_1}{1 - \cos q}$ On reconnaît

l'équation d'une parabole de foyer O et de sommet (r_1, π) .

5) Equation des lignes de champ

$E_r = \frac{b \sin \frac{q}{2}}{2\sqrt{r}}$ et $E_q = \frac{b \cos \frac{q}{2}}{2\sqrt{r}}$ donc $\frac{dr}{E_r} = \frac{r dq}{E_q} \Rightarrow r = \frac{C}{\cos^2 \frac{q}{2}} = \frac{2c}{1 + \cos q}$ Ce sont des paraboles de foyer O, dont les sommets sont sur le demi plan conducteur.

Représentation très qualitative (qui ne respecte pas l'orthogonalité des deux réseaux de courbes).



6) $E_r = 0$ pour $\theta=0$ ou $\theta=2\pi$ (Le champ est normal au conducteur.)

$E_q = \frac{b}{2\sqrt{r}}$ pour $\theta=0^+$, opposé pour $\theta=2\pi^-$. On obtient donc sur les deux faces la même charge : $s = \frac{b}{2\sqrt{r}}$. Si r tend vers 0 le champ, donc la densité de charge σ deviennent très grands, ceci traduit le pouvoir des pointes. On notera bien entendu, que le champ est sur les deux faces, dirigé vers l'intérieur ou l'extérieur du conducteur, selon le signe de σ .

B) Disque seul dans l'espace

1) Pour un conducteur unique en équilibre électrostatique, le fait d'imposer le potentiel sur le conducteur fixe également le potentiel et le champ en tout point de l'espace et par conséquent la répartition de charge à la surface qui est unique et ne peut donc être fixée à priori. Ceci est une conséquence du théorème d'unicité. C'est la forme du conducteur qui va déterminer la répartition des charges à sa surface. La densité superficielle de charge est proportionnelle au potentiel du conducteur.

$$2) Q = \int_0^a \frac{2prg}{\sqrt{a^2-r^2}} dr = 2pga \quad V_0 = \frac{1}{4pe_0} \int_0^a \frac{2prg}{r\sqrt{a^2-r^2}} dr = \frac{gp}{4e_0}$$

$\frac{Q}{V_0} = 8e_0 a$ C'est la capacité du disque seul chargé à la condition que la répartition de charge à la surface du conducteur soit effectivement celle proposée.

3) L'expression proposée traduit le pouvoir des pointes. De plus dans l'étude faite en A-6 on a remarqué que la densité de charge variait comme $\frac{1}{\sqrt{d}}$ si d est la distance au bord. Or ici on a

$$\sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{(a-r)(a+r)} @ \sqrt{(a-r)2a} = \sqrt{2a}\sqrt{d}. \text{ Ce qui donne la même allure de variation.}$$

C) Disque chargé

1) $\lambda(x) dx$ représente la charge portée par une bande de largeur dx du disque chargé.

$\lambda(x)$ est donc la charge par unité de longueur selon x .

$$\text{Charge totale } Q = \int_{-a}^{+a} \lambda(x) dx$$

2) $\mathbf{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$$dS = MA \cdot d(MA) \cdot d\theta$$

Potentiel créé en M par l'élément de surface dS

$$d^2V = \frac{s(\sqrt{x^2 + y^2}) MA \cdot d(MA) \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 MA}$$

$$MA = MH + HA = MH + y \quad \text{donc } d(MA) = dy$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} s(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \lambda(x) \quad \text{mais } x = r \sin \theta \quad \text{donc } dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \lambda(r \sin \theta) \quad \text{et finalement}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{q=-\frac{p}{2}}^{q=\frac{p}{2}} \lambda(r \sin \theta) dq$$

3) Puisque nous avons un conducteur $V(r) = V_0$ quel que soit r . La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution n'est pas évidente, mais si on les admet, comme le suggère l'énoncé, alors il suffit de remarquer que $\lambda = Cte$ donne une solution. On obtient alors de manière évidente à partir de l'expression intégrale de la question précédente $\lambda = 4\epsilon_0 V_0$

$$\text{Charge totale } Q = \int_{-a}^{+a} 4\epsilon_0 V_0 dx = 8\epsilon_0 V_0 a$$

$$4) \lambda(x) = g \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dy \quad \text{dont le calcul donne effectivement une constante } \lambda(x) = gp$$

$$\text{Il faut donc prendre } g = \frac{4V_0 \epsilon_0}{p} \quad \text{et } s(r) = \frac{4\epsilon_0 V_0}{\sqrt{a^2-r^2}}$$