فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}$$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0<u_n<1$.

ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما .

جـ - استنتج أن (u_n) متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n}{u_n-1}$.

1- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وأحسب حدها الاول v_0 .

2- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{1+3^n}$.

جـ - احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$.

تمرين 2 (10 ن) :

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث :

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 0

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ،2 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 0 .

(كل الكرات لا نفرق بينها عند اللمس) .

I) نختار عشوائيا أحد الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون ارجاع

وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالارجاع .

1-أحسب احتمال الحوادث الاتية :

A " سحب كرتين من نفس اللون ".

B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم ".

C " سحب كرة حمراء على الاقل ".

2-هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علل .

3-اذا علمت ان الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما احتمال ان تكون من الصندوق U_1 ؟

II) نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 . نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الارقام التي تحملهما الكراتين المسحوبتين

1-عين قيم المتغير العشوائي X .

2-عرف قانون الاحتمال لـ X .

بالتوفيق .

الاجابة النموذجية :

تمرين 1 :

1-ا) البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0<u_n<1$:

☜من أجل $n=0$ لنا : $0<u_0=\frac{1}{2}<1$ محققة .

☜نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من اجل $n+1$ (أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n $0<u_{n+1}<1$).

لنا من اجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ تكافئ : $0<-2u_n<-2$ تكافئ : $1<3-2u_n<3$

ومنه : $0<\frac{u_n}{3-2u_n}<1$ أي : $0<u_{n+1}<1$.

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من اجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

2)بيان ان (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{3-2u_n}-u_n=\frac{u_n-u_n(3-2u_n)}{3-2u_n}=\frac{u_n-3u_n+2u_n^2}{3-2u_n}=\frac{2u_n^2-2u_n}{3-2u_n}=\frac{2u_n(u_n-1)}{3-2u_n}$$

لنا : $0<u_n<1$ أي : $2u_n>0$ و $-1<u_n-1<0$ أي : $u_n-1<0$ ولنا : $1<3-2u_n<3$ أي :

$3-2u_n>0$

ومنه : $u_{n+1}-u_n<0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتاج ان (u_n) متقاربة : لنا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

2-أ - بيان ان (v_n) هندسية اساسها $q=\frac{1}{3}$ وحساب حدها الأول :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}=\frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{3u_n-3}{3-2u_n}}=\frac{u_n}{3u_n-3}=\frac{1}{3}\times\frac{u_n}{u_n-1}=\frac{1}{3}v_n$$

حساب الحد الأول : $v_0=\frac{u_0}{u_0-1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=-1$.

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=-1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $v_n=\frac{u_n}{u_n-1}$ تكافئ : $v_n(u_n-1)=u_n$ تكافئ : $v_nu_n-v_n=u_n$ تكافئ : $v_nu_n-u_n=v_n$

تكافئ : $u_n(v_n-1)=v_n$ تكافئ : $u_n=\frac{v_n}{v_n-1}$ تكافئ :

$$u_n=\frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}=\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}+1}=\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}}=\frac{1}{3^n}\times\frac{3^n}{1+3^n}=\frac{1}{1+3^n}$$

جـ - حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+3^n} = 0$ (لان : $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$)

3-حساب المجموع S_n :

$$S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{1+3^0}}+\frac{1}{\frac{1}{1+3^1}}+.....+\frac{1}{\frac{1}{1+3^n}} = 1+3^0+1+3^1+...+1+3^n = 1+1+...+1+3^0+3^1+...+3^n$$

$$= 1\times(n-0+1)+3^0\times\frac{3^{n-0+1}-1}{3-1} = n+1+\frac{3^{n+1}-1}{2} = n+1+\frac{1}{2}\times(3^{n+1}-1)$$

تمرين 2 :

I)

1) حساب احتمال الحوادث :

2) الحدثان A و B غير مستقلان لان :

$$p(A\cap B) = p(U_1\cap A\cap B)+p(U_2\cap A\cap B)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{5^2} = \frac{53}{350}$$

لنا : $p(A)\times p(B) = \frac{689}{1400}\times\frac{527}{1400}\approx 0.18$ أي $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

3) حساب احتمال ان تكون الكرتين المسحوبتين من U_1 علما انهما مختلفتان في اللون .

$$p_{\overline{A}}(U_1) = \frac{P(U_1\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1\times 2}{A_8^2}}{1-P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{1-\frac{689}{1400}} = \frac{\frac{17}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{425}{711}$$

II)

1-قيم المتغير العشوائي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

2-قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{26}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{C_{13}^2}=\frac{24}{78}=\frac{4}{13}$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2+C_3^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\frac{17}{39}$$

$$P(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\frac{8}{39}$$

$$P(X=4)=\frac{C_2^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{26}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{78}$