

Índice

Objectivos	2
1.1.1 Geral	2
1.1.2 Específicos	2
2.0 Metodologia	2
3.0 Fundamentação Teórica	3
3.1 Definição dos conceitos	3
3.1.1 Geometria	3
3.1.2 Projecção	3
3.1.3 Geometria Projectiva	3
3.2 Propriedades Métricas do Quadrilátero Harmónico	3
3.2.1 Pontos Harmónicos Conjugados	3
3.2.2 conjunto Quadrangular	4
3.3 perspectiva e projectividade: teorema fundamental	5
3.3.1 Projectividade (conceito)	5
3.3.2 Perspectividade	6
3.3.3 Teorema fundamental	6
3.3.4 Prova do Teorema fundamental da Geometria Projectiva	9
3.4 Teorema de Steiner	10
4. Conclusão	12
5. Referências	13

1.0 Introdução

No dia-a-dia, sempre visualizamos diversos objectos em planos diferentes. Seja quando vamos ao mercado, seja quando vamos a universidade ou outro sítio e esta visualização dá-nos uma imagem do que enxergamos que muitas das vezes não chega a ser a realidade do referido objecto visualizado, quando este for observado a longa distância.

O presente trabalho, visa debruçar acerca das propriedades métricas do quadrilátero harmónico que é as principais ferramentas utilizadas referentes às geometrias não euclidianas envolvidas no estudo. Este trabalho tem como objectivo fornecer ao leitor conhecimentos que surgem como subsídios da Geometria Euclidiana explorando as respectivas propriedades onde destacamos, sempre que possível, as características específicas que despertaram o interesse dos matemáticos, perpetuando o seu estudo até aos nossos dias.

E para a sua realização, teve-se como foco a compreensão dos Compreender os conceitos, as propriedades, teorema fundamental e teorema de Steiner.

Objectivos

1.1.1 Geral

- Compreender os conceitos, propriedades, teorema fundamental e teorema de Steiner.

1.1.2 Específicos

Descrever as propriedades métricas do quadrilátero harmónico.

- Enunciar o teorema fundamental e teorema de Steiner.

2.0 Metodologia

Para realização do presente Trabalho, os autores recorreram à pesquisa Bibliográfica.

Segundo Canastra, Haanstra & Vilanculos (2015, P.27), pesquisa Bibliográfica, não deve reduzir-se à consulta de manuais ou livros, mas deve, também, cingir-se às revistas científicas e teses de doutoramento, uma vez que, a partir destas, podemos ter contacto com estudos empíricos relacionados com a nossa problemática.

3.0 Fundamentação Teórica

3.1 Definição dos conceitos

3.1.1 Geometria

A palavra Geometria tem etimologia grega e significa medição de terras.

Na Antiga Mesopotâmia e no Antigo Egito, o conhecimento geométrico resumia-se a um aglomerado de procedimentos práticos de mensuração aplicados, principalmente, na agricultura e eram cálculos empíricos de comprimentos, áreas e volumes como emprego de fórmulas, muitas delas erroneamente utilizadas.

3.1.2 Projectão

Segundo Miceli & Ferreira (s.d, p.21), projectar significa representar graficamente, em um plano uma figura localizada no espaço.

Logo, pode-se entender a projectão como acção de projectar, lançar ou arremessar; atirar longe fazer incidir, estender, prolongar.

3.1.3 Geometria Projectiva

Segundo Valentim & Auffinger (2003, p.2), a geometria projectiva lida com o mundo que vemos e o seu desenvolvimento pode ser feito auxiliando-se apenas uma régua não graduada, razão pela qual é dita não métrica.

A Geometria Projectiva ocupa-se das propriedades projectivas ou gráficas das figuras, em oposição às propriedades métricas e tem como elementos fundamentais ao ponto, a recta e o plano, e operações fundamentais a projectão e a intersecção, que visam definir e articular a noção de espaço projectivo (Ribeiro, 1991, p.27).

Para Muchanga (s.d. p.6), a geometria projectiva fundamenta teoricamente a descritiva adicionando-lhe métodos que altera a abordagem inicial aos elementos e suas relações separando-se da euclidiana e reinterpretando de modo mais alargado, isto é, uma nova forma de ver e o que diferencia a projectiva da euclidiana são os pontos do infinito ou impróprios.

Em síntese a Geometria projectiva é a geometria do que os olhos vêem e não apenas o como elas são, como pode-se notar na nota explicativa abaixo.

3.2 Propriedades Métricas do Quadrilátero Harmónico

3.2.1 Pontos Harmónicos Conjugados

Para a definição de pontos harmónicos conjugados, necessitamos da configuração do plano projetivo denominada de quadrângulo.

Definição 1: Um quadrângulo completo [PQRS] é formado por quatro pontos P, Q, R e S, designados por vértices, não existindo três pontos colineares, e pelas seis rectas definidas por cada par de vértices, designadas por lados.

Definição 2: Num quadrângulo completo, dois lados dizem-se opostos quando não têm vértices em comum. Os pontos de interseção dos lados opostos são designados por pontos diagonais.

3.2.2 conjunto Quadrangular

Antes de falarmos de conjunto quadrangular, vamos apresentar o conceito de quadrângulo completo que através dele permite determinar um conjunto quadrangular. O quadrângulo completo associado a quatro pontos P, Q, R, S em posição geral, designados por vértices, é a figura constituída pelas seis rectas definidas por esses pontos dois a dois, os lados do quadrângulo, e os respectivos pontos de interseção. Dois lados designam-se opostos quando não têm vértices em comum. Os pontos de interseção dos lados opostos de um quadrângulo são designados por pontos diagonais, que por sua vez, são os vértices do triângulo diagonal de um quadrângulo completo.

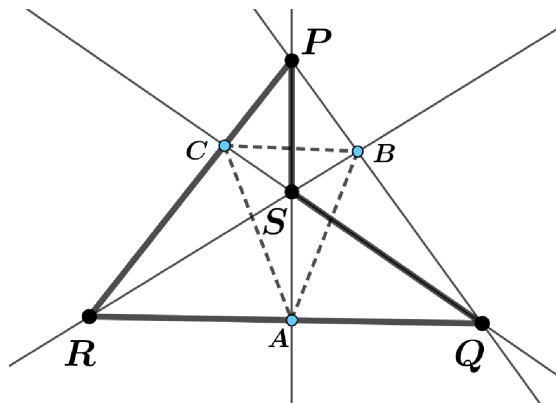


Figura 1: Triângulo diagonal $A = QR \cap PS$, $B = RS \cap PQ$ e $C = SQ \cap PR$:

Na figura 2, temos um quadrângulo completo PQRS com os seus pontos diagonais A, B e C; e podemos ainda identificar os seus lados opostos que são: o lado QR oposto ao lado PS, o lado SQ oposto à PR e por último, o lado RS oposto à PQ. Dualizando um quadrângulo completo nos fornece um quadrilátero completo que é uma figura formada por quatro rectas (lados) p, q, r e s, não havendo três concorrentes e pelos seis pontos (vértices) de interseção qr, qs, qp, ps, pr e rs. As rectas definidas pelos vértices opostos, a, b e c, são as diagonais do quadrilátero e são os lados do triângulo diagonal

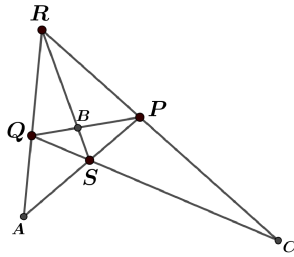


Figura 2: Quadrângulo completo PQRS e os pontos diagonais A, B e C:

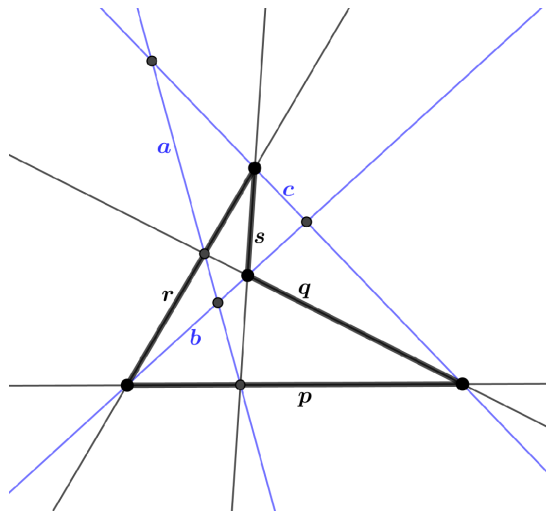


Figura 3: Quadrilátero completo p q r s e triângulo diagonal abc.

As rectas a; b e c são formadas pelas seguintes interseções:

$$a = (q \cap r)(p \cap s); b = (q \cap s)(p \cap r); c = (q \cap p)(r \cap s):$$

3.3 perspectiva e projectividade: teorema fundamental

3.3.1 Projectividade (conceito)

Uma Projectividade, de acordo com Von Staudt, é uma correspondência entre dois pontuais que preserva a relação harmónica, isto é, se A e B estão separados harmonicamente de C e D, então A' e B' estarão separados harmonicamente de C' e D'. Como a perspectividade preserva o harmonismo então, resulta desta definição que uma perspectividade é uma projectividade, bem como qualquer composta de perspectividades em número finito. Neste contexto, podemos definir a *projectividade* como sendo uma cadeia finita de perspectividade e representaremos pelo símbolo $\overline{\wedge}$ que não deve ser confundido com o símbolo da perspectividade.

3.3.2 Perspectividade

Duas figuras correspondentes tais que as rectas que unem os vértices correspondentes são concorrentes num ponto dizem-se *perspectivas* em relação a esse ponto de concorrência se os pontos de intersecção dos lados correspondentes forem colineares. Assim, o ponto de concorrência é o *centro da perspectividade*. Representa-se a perspectividade pelo símbolo $\overline{\wedge}$ ”.

3.3.3 Teorema fundamental

Como visto na secção anterior, um operador linear invertível $A : R^3 \rightarrow R^3$ induz uma colineação $A : RP^2 \rightarrow RP^2$. A recíproca deste fato também é verdadeira.

Teorema (Teorema fundamental da Geometria Projetiva) Toda colineação $\psi : RP^2 \rightarrow RP^2$ é induzida por um operador linear invertível $A : R^3 \rightarrow R^3$.

A demonstração seguirá de dois resultados. O primeiro afirma que o único automorfismo do corpo dos reais é a aplicação identidade. O segundo resultado classifica todas funções do R^2 nele próprio que aplica rectas em rectas. Demonstremos o primeiro resultado. Se $f : R \rightarrow R$ é uma aplicação não identicamente nula tal que Para quaisquer x e y reais valem as igualdades:

a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; (*aditiva*)

b) $f(xy) = f(x)f(y)$. (*multiplicativa*)

Então $f(x) = x$.

Prova Registremos algumas observações.

1ª *Observação* $f(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$. Vejamos. As igualdades

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ implicam que $f(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que exista um $a \neq 0$ tal que $f(a) = 0$. Então

$$f(x) = f\left(a \cdot \frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0f\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Isto significa que f é identicamente nula, uma contradição.

2ª *Observação* f é uma função ímpar, pois

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

3ª *Observação* $f(1) = 1$. Para qualquer x real temos que $f(x) = f(1x) = f(1)f(x)$, portanto, $f(x)(f(1) - 1) = 0$. Como f não é identicamente nula, existe x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$. Logo, $f(1) = 1$.

4ª *Observação* $f(x^2) = [f(x)]^2$ para qualquer x pois $f(x^2) = f(xx) = f(x)f(x)$. Afirmação 1 $f(nx) = nf(x)$ para quaisquer inteiro n e qualquer x real. Fixemos qualquer x real. Demonstremos por indução que a afirmação é verdadeira para qualquer $n \geq 0$. Para $n = 0$ a afirmação é correta pelas observações iniciais.

Vamos assumir que a afirmação seja verdadeira para n . Calculemos $f((n+1)x)$,

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para qualquer $n \geq 0$. Para $n < 0$, utilizamos o fato da função ser ímpar, $f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$. Isto conclui a demonstração da afirmação. A afirmação 2 $f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}f(x)$ para qualquer racional $\frac{m}{n}$ e qualquer x real.

Fixemos qualquer x . Seja $m = 0$ um inteiro. Pela afirmação anterior podemos escrever,

$$f(x) = f(\frac{m}{n}x) = mf(\frac{1}{m}x)$$

.

Logo, $f(\frac{m}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$. Agora é fácil concluir a demonstração da afirmação.

Afirmação 3 $f(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}$ para todo racional $\frac{n}{m}$.

A demonstração é trivial,

$$f(\frac{n}{m}) = f(\frac{n}{m} \cdot 1) = \frac{n}{m}f(1) = \frac{n}{m}.$$

Afirmação 4 f preserva a ordem, isto é, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Seja $x > 0$. Como existe $a > 0$ tal que $a^2 = x$, temos $f(x) = f(a^2) = [f(a)]^2 > 0$. Isto é suficiente para mostrar que f preserva a ordem. Vejamos. Se $x < y$ então $0 < y - x$. Pelo visto, $0 < f(y - x) = f(y) - f(x)$, portanto $f(x) < f(y)$. Concluindo a demonstração da proposição. Suponha, por absurdo, que exista x_0 tal que $f(x_0) = x_0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(x_0) < x_0$.

Como sabemos, dados dois números reais distintos, existe um racional entre eles. Escolha um racional a tal que $f(x_0) < a < x_0$. Como f preserva a ordem e a é racional, temos que $a = f(a) < f(x_0)$, uma contradição. Logo $f(x) = x$ para qualquer x real.

Proposição 11.3.2 *Seja $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função biunívoca tal que $B(o) = o$. Se B aplica rectas Euclidianas em rectas Euclidianas então B é um operador linear invertível.* Prova O termo "aplica rectas em rectas" significa que a imagem de uma recta Euclidiana está contida numa recta Euclidiana.

Sejam l_1 e k rectas tais que $B(l_1) \subset k$. Inicialmente mostraremos que $B(l_1) = k$ e l_1 é a única recta cuja imagem está contida em k . Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto $q \in k$ mas $q \notin B(l_1)$. Neste caso, como B é biunívoca existe um único ponto q_0 tal que $B(q_0) = q$. É claro que $q_0 \notin l_1$. Seja l_2 uma recta que contém q_0 e é perpendicular a l_1 em $q_1 \in l_1$. Como B aplica rectas em rectas e $B(q_0), B(q_1) \in k$ estão em $B(l_2) \subset k$. Agora, dado um ponto qualquer p de $\mathbb{R}^2$, ele pertence a uma recta l que intercepta $l_1 \cup l_2$ em pelo menos dois pontos, digamos p_1 e p_2 . Novamente, como $B(p_1), B(p_2) \in k$ segue que $B(l) \subset k$. Isto mostra que $B(\mathbb{R}^2) \subset k$. Uma contradição, pois estamos supondo que B é sobrejetiva.

Portanto, só existe a recta l_1 tal que $B(l_1) = k$. Mostremos agora que as imagens por B de quaisquer duas rectas paralelas l_1 e l_2 são duas rectas paralelas. Pelo visto, as suas imagens $B(l_1)$ e $B(l_2)$ são rectas distintas. Suponha, por absurdo, que exista um ponto na intersecção $p \in B(l_1) \cap B(l_2)$. Sendo assim, a pré-imagem $B^{-1}(p)$ tem pelo menos dois pontos, um em cada recta paralela, contradizendo a hipótese de B ser biunívoca. **Afirmção 1** Se $\{v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ então $B(v + w) = B(v) + B(w)$. A hipótese de ser base implica que v e w não são nulos e não colineares. Sejam l_1 e l_2 as rectas distintas que concorrem na origem e tais que $v \in l_1$ e $w \in l_2$. Sendo assim, $\{v + w\} = l'_1 \cap l'_2$, em que l'_1 é a recta que passa por w e é paralela á recta l_1 enquanto l'_2 é a recta que passa por v e é paralela á l_2 . Examinemos as imagens por B , $B(v) \in k_1 = B(l_1)$ e $B(w) \in k_2 = B(l_2)$. Como sabemos, k_1 e k_2 são rectas distintas, logo, $\beta = \{B(v), B(w)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ pois nenhum vector nulo e são não colineares. Agora, as rectas $k'_1 = B(l'_1)$ e $k'_2 = B(l'_2)$ são rectas que passam, respectivamente, por $B(w)$ e $B(v)$ e são paralelas, respectivamente, a k_1 e k_2 . É claro que $\{B(v) + B(w)\} = k'_1 \cap k'_2$. Por outro lado, $\{B(v + w)\} = B(l'_1 \cap l'_2) = k'_1 \cap k'_2$, portanto, $B(v + w) = B(v) + B(w)$.

Afirmção 2 Existe uma transformação linear invertível $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $C = A^{-1} \circ B$ e expressa na forma $C(x, y) = (f(x), g(y))$, em que f e g são biunívocas, $f(0) = g(0) = 0$ e $f(1) = g(1) = 1$. E mais, C satisfaz as hipóteses do teorema. Como feito na afirmação 1, mostramos que o conjunto de dois vectores $\beta = \{B(e_1), B(e_2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $A(e_1) = B(e_1)$ e $A(e_2) = B(e_2)$. Mais precisamente, seja $A(x, y) = xB(e_1) + yB(e_2)$. Como β é uma base então A é invertível. Recordamos que A^{-1} é uma transformação linear.

Sendo uma transformação linear, A^{-1} aplica rectas em rectas, $A^{-1}(o) = o$ e, sendo invertível, A^{-1} é sobrejetiva. Agora, é imediato concluir que $C = A^{-1} \circ B$ também é uma aplicação biunívoca, aplica rectas em rectas e $C(o) = o$. Portanto, C satisfaz todas as hipóteses da proposição.

Por construção, $C(o) = o$, $C(e_1) = e_1$ e $C(e_2) = e_2$. Isto implica que C preserva os eixos ox e oy . Logo, C transforma rectas horizontais em rectas horizontais enquanto rectas verticais são transformadas em rectas verticais. Isto é suficiente para mostrar que $C(x, y) = (f(x), g(y))$. A biunicidade de f e g e os valores enunciados deixaremos como exercício. Isto conclui a demonstração da afirmação. Iremos mostrar que $C \equiv \text{id}$. Disto segue que $A \equiv B$, portanto, B é uma transformação linear.

Afirmção 3 As funções coordenadas de $C(x, y) = (f(x), g(y))$ são aditivas, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$. Examinemos apenas f , o estudo de g é similar.

Dados x_1 e x_2 . Se $x_1 = 0$, considere a base $\{v, w\}$ do $\mathbb{R}^2$, em que $v = (x_1, 0)$ e $w = (x_2, 1)$. Pela Afirmção 1, vale a aditividade $C(v + w) = C(v) + C(w)$, implicando que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Se $x_1 = 0$, como $f(0) = 0$, é imediato verificar que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Afirmção 4 $f \equiv g$ e $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos uma recta com inclinação α , digamos $l : y = \alpha x + b_0$, e calculemos a inclinação $i(\alpha)$ da recta imagem $C(l)$. Para isto, sejam $(0, b_0)$ e $(x, \alpha x + b_0)$ dois pontos distintos de l . É claro que $x \neq 0$. A inclinação de $C(l)$ é

$$i(\alpha) = \frac{g(\alpha x + b_0) - g(b_0)}{f(x) - f(0)} = \frac{g(\alpha x)}{f(x)}$$

A última igualdade segue por $g(\alpha x + b_0) = g(\alpha x) + g(b_0)$ e $f(0) = 0$. Avaliando em $x = 1$ obtemos que $i(\alpha) = g(\alpha)$ pois $f(1) = 1$. Logo, $g(\alpha x) = g(\alpha) f(x)$ para quaisquer x e α . Avaliando em $\alpha = 1$ concluíamos que $g \equiv f$ pois $g(1) = 1$. Portanto, $f(\alpha x) = f(\alpha) f(x)$. Isto encerra a demonstração da afirmação. Pelo visto, $f(x) = x = g(x)$. Logo, $C(x, y) = (f(x), g(y)) = (x, y)$, encerrando a demonstração da proposição.

3.3.4 Prova do Teorema fundamental da Geometria Projetiva

Seja $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma colineação. Sem perda de generalidade, podemos assumir que ψ preserva a recta ideal I_∞ e fixa o ponto $(0 : 0 : 1)$. Caso isto não ocorra, consideramos os pontos projetivos não colineares três a três, $a = \psi(1 : 0 : 0) \in \psi(I_\infty)$, $b = \psi(0 : 1 : 0) \in \psi(I_\infty)$ e $c = \psi(0 : 0 : 1)$,

e construíamos uma colineação $D : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ induzida de um operador linear do

$\mathbb{R}^3$ tal que $D(a) = (1 : 0 : 0)$, $D(b) = (0 : 1 : 0)$ e $D(c) = (0 : 0 : 1)$. Logo, a composta $D \circ \psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma colineação que fixa o ponto $(0 : 0 : 1)$ e preserva a recta ideal desde que fixa dois de seus pontos, quais sejam $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 1 : 0)$. Iremos supor que a colineação ψ está sob as condições descritas acima. Sendo assim, ψ aplica biunivocamente o plano afim no plano afim. Isto permite definir uma aplicação $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ via identificação afim, estabelecendo que $B(x, y)$ é tal que $(B(x, y) : 1) = \psi(x : y : 1)$.

Como ψ é uma aplicação biunívoca do plano afim que aplica rectas afins, e a identificação afim aplica rectas Euclidianas do $\mathbb{R}^2$ em rectas afins e como $(B(0, 0) : 1) = \psi(0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1)$, é imediato concluir que

- B aplica rectas Euclidianas em rectas Euclidianas,
- B fixa a origem $o \in \mathbb{R}^2$
- e B é biunívoca.

Portanto, $B : R^2 \rightarrow R^2$ é um operador linear invertível. Considere o operador linear invertível $A : R^3 \rightarrow R^3$, definido por $A(x, y, z) = (B(x, y), z)$. Ficará aos cuidados do leitor mostrar que $\psi = A$.

3.4 Teorema de Steiner

Definição: (Steiner). Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos comuns a rectas correspondentes de dois feixes projectivos, mas não perspectivas.

Teorema (Steiner). Sejam P e Q dois pontos sobre uma cônica. Se R é um ponto variando sobre a cônica então para $x = RP$ e $y = RQ$ temos $x \sim Z y$

Demonstração. De fato, as tangentes p e q se intersectam em um ponto D , pólo de PQ . Assim, tome uma recta c sobre D não incidente nem com P nem com Q e defina os pontos $B = c \cap x$ e $A = c \cap y$. Segue pelo teorema de Seydewitz que BA é um par da involução de pontos conjugados em c . Logo, a medida que o ponto $x \cap y$ varia sobre a cônica, temos: $x \sim Z B \sim Z A \sim Z Y$

A recíproca do teorema anterior seria provada com a ajuda do:

Teorema: Uma cônica é determinada quando três pontos e duas tangentes em dois destes pontos são dadas.

Demonstração. A ideia da demonstração é encontrar uma polaridade que induza uma cônica satisfazendo o enunciado. De fato, sejam P, Q e R os pontos dados,

Figura 4: Teorema de Steiner

PD e QD as rectas dadas e F o conjugado harmónico de $C = PQ \cap RD$ com respeito a P e Q , conforme a Figura 5.4. Considere a correlação $PQRD \rightarrow PD, QD, RF, PQ$ que transforma PQ em D , RD em F , C em FD e induz em PQ a projetividade $PQC \sim Z PQF$. Como $H(PQ; CF)$, temos $PQCF \sim Z PQFC$.

Portanto, a correlação, que transforma F em CD , é uma polaridade. Segue então, que a polaridade determina a cônica desejada, visto que os polares de P, Q , e R são as rectas PD, QD e RF .

Figura 5: Cónica por 3 pontos tangente a duas rectas dadas

Teorema (Construção de Steiner). *Se x e y são rectas variáveis passando pelos pontos P e Q de tal forma que $x \wedge y$, mas não $x \parallel y$, então o lugar geométrico dos pontos $x \cap y$ é uma cónica (von Staudt) incidente a P e Q . Além disso, se a projetividade tem o efeito $pdx \rightarrow Z \rightarrow dqy$ onde $d = PQ$, então p e q são as tangentes nos pontos P e Q .*

4. Conclusão

Durante a realização do trabalho, constatamos que a Geometria projectiva difere-se da geometria euclidiana porque ela estuda o que os olhos vêem e não apenas o como elas são, razão pela qual geometria projectiva não se opõe a geometria euclidiana, , acreditamos ter atingido o principal objetivo de contribuir para um enriquecimento ao nível da prática lectiva. De entre os contributos recebidos, podemos referir a percepção consciente da importância da Geometria no desenvolvimento da observação e do poder de síntese e na capacidade de relação de conteúdos. Embora estivéssemos cientes de tal, com o desenvolvimento do presente trabalho pudemos, por experiência própria, perceber melhor a real importância do

papel da Geometria no ensino da Matemática, Igualmente inclui-se a aquisição de novos conhecimentos, nomeadamente ao nível das geometrias não euclidianas.

E também podemos observar que as Propriedades Métricas do Quadrilátero Harmónico num quadrângulo completo, dois lados dizem-se opostas quando não têm vértices em comum. Os pontos de interseção dos lados opostos são designados por pontos diagonais. E que o teorema de Steiner uma cónica é o lugar geométrico dos pontos comuns a rectas correspondentes de dois feixes projectivos, mas não perspectivas.

5. Referencias

- AUFFINGER, António Carlos T. de C. & VALENTIM, Fábio Júlio da Silva. *Introdução à geometria Projectiva*. Departamento de Matemática da Universidade Federal do Santo; Vitória, Setembro de 2003.
- BOYER, Carl B. *História da matemática*. Prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach; tradução de Elza F. Gomide. 3.ed. São Paulo: Blucher, 2010
- Muchanga, F. A. (s.d.). *Manual de geometria Projectiva*. Universidade Católica de Moçambique-Centro de Ensino à Distância, Beira.