

1.- Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = -1 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Expréselo en forma matricial.

Resolución

Llamando $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes, $X = (x \ y \ z)$ y $b = (0 \ -1 \ 0)$ tenemos $AX = b$

b) Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

Resolución

Como $\det A = -2 + 1 - 2 + 2 = -1 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A) = \frac{1}{-1} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Resuélvalo.

Resolución

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \\ z = -2 \end{cases}$. Como $z = -2$, entonces $y = z + 1 = -2 + 1 = -1$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $x - 1 - 2 = 0$, $x = 3$. La solución del sistema es $x = 3, y = -1, z = -2$

2.- (prueba extraordinaria)

a) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema:

"Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 638000 ptas. Su precio original era de 1200 ptas por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta, calcular cuantas camisetas se vendieron a cada precio."

Resolución

Sean x, y, z el nº de camisetas con precio original, con descuento del 30% y del 40%, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 1200x + 0,7 \cdot 1200y + 0,6 \cdot 1200z = 638000 \\ y + z = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 600 \\ 1200x + 840y + 720z = 638000 \\ x = 2y + 2z \end{cases}$$

b) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones: $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & -4 & -5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 & -4 & -5 & 1 & -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det A = -16 - 20 - 6 + 24 + 10 + 8 = 0$ y como $|1 \ -2 \ 1 \ -4| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 & -4 & -5 & 1 & -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 + 2f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|-1 \ 2 \ 0 \ 1| = -1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{-x + 2y + 3z = -1 \quad y + z = 0\}$

En la 2ª ecuación, $y = -z$; en la 1ª ecuación, $x = 2y + 3z + 1 = -2z + 3z + 1 = z + 1$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k + 1 \quad y = -k \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

3.- (prueba ordinaria) En una tienda, un cliente se ha gastado 15000 ptas en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 2000 ptas, cada libro 1500 ptas y cada carpeta 500 ptas. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

(a) Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado anterior.

Resolución

Sean x, y, z el nº de discos, libros y carpetas, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2000x + 1500y + 500z = 15000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 4x + 3y + z = 30 \end{cases}$$

(b) Determine cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Resolución

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 & 4 & 3 & 1 & 30 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_2 - 4f_1 \quad f_3 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 & 0 & -1 & -3 & -18 & 0 & -4 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad -f_2 \quad f_3:$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ y + 3z = 18 \end{cases}$. Como $y = 3$, entonces $3 + 3z = 18$, $z = 5$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $x + 3 + 5 = 12$, $x = 4$. Compró 4 discos, 3 libros y 5 carpetas.

4.-

a) Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 gr, 250 gr y 500 gr, cuyos precios son 150 ptas, 270 ptas y 495 ptas, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2,5 kg, y paga por ellos 2670 ptas. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.

1) Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado del problema.

Resolución

Sean x, y, z el nº de helados de tamaño pequeño, mediano y grande, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 125x + 250y + 500z = 2500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 4z = 20 \end{cases}$$

2) Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

Resolución

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 2 & 4 & 20 & 10 & 18 & 33 & 178 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - 10f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 1 & 3 & 10 & 0 & 8 & 23 & 78 \end{pmatrix} \quad f_3 - 8f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 1 & 3 & 10 & 0 & 8 & 23 & 78 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y + 3z = 10 \\ -z = -2 \end{cases}$. Como $z = 2$, entonces $y + 3 \cdot 2 = 10$, $y = 4$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $x + 4 + 2 = 10$, $x = 4$. Se llevó 4 pequeños, 4 medianos y 2 grandes.

b) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, halle A^{200} .

Resolución

Observamos que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Luego $A^{200} = (A^2)^{100} = I^{100} = I$

5.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que $(AB)^t = B^t A^t$ (t indica traspuesta).

Resolución

$$(AB)^t = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (AB)^t = B^t A^t.$$

b) Halle una matriz X que verifique $ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Resolución

Sea $C = AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Nos queda la ecuación $CX = D$.

$$\text{Como } \det C = -3 \neq 0, \text{ existe } C^{-1}; C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\text{adj } C^t) = \frac{1}{-3} \text{adj} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por C^{-1} , por la izquierda, $C^{-1}CX = C^{-1}D$, $X = C^{-1}D$

$$X = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 15 & 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

a) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 1$.

Resolución

Para $m = 1$, las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$ porque $f_1 = f_3$ y como $|1 \ 1 \ 1 \ 3| = 2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 = f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 2| = 2 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{En la 2ª ecuación, } y = \frac{1}{2}; \text{ en la 1ª ecuación, } x = 4 - y - z = 4 - \frac{1}{2} - z = \frac{8-1-2z}{2} = \frac{7-2z}{2}$$

$$\text{Llamando } z = k, \text{ las infinitas soluciones son } \begin{cases} x = \frac{7-2k}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

b) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 2$.

Resolución

Para $m = 2$, las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)$ y
 $A^* = (1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \ 4)$

$\det A = 3 + 4 + 1 - 6 - 1 - 2 = -1 \neq 0$. Luego, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

La matriz del sistema es

$$(1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \ 4) \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - 2f_1 \quad (1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -3 \ -1 \ -4) \quad -f_3 \quad (1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 4)$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y = 1 \\ 3y + z = 4 \end{cases}$. Como $y = 1$, entonces $3 \cdot 1 + z = 4$, $z = 1$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $x + 2 \cdot 1 + 1 = 4$, $x = 1$. La solución del sistema es $x = y = z = 1$

7.- En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto A, 4 unidades de un producto B y 3 unidades de un producto C, pagando un total de 4500 ptas.

Otro cliente compra 2 unidades de A y 2 unidades de C, pagando en total 2000 ptas.

Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caros que el supermercado, 3 unidades del producto A y una de B, pagando un total de 1210 ptas. Se pide:

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado.

Resolución

Sean x, y, z los precios por unidad de los productos A, B y C, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3z = 4500 \\ 2x + 2z = 2000 \\ 1,1x + 1,1y = 1210 \end{cases} \quad :2 \cdot 10 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 3z = 4500 \\ x + z = 1000 \\ 11x + 11y = 12100 \end{cases}$$

b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos A, B y C en el supermercado.

Resolución

La matriz del sistema es

$$(5 \ 4 \ 3 \ 4500 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1000 \ 3 \ 1 \ 0 \ 1100) f_1 - 5f_2 \quad f_3 - 3f_2 \quad (0 \ 4 \ -2 \ -500 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1000 \ 0 \ 1 \ -3 \ -1900) f_1 - 4f_3 \quad (0 \ 0 \ 10 \ 7100 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1000 \ 0 \ 1 \ -3 \ -1900) f_1$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x = 710 \\ x + z = 1000 \\ y + 3z = 1900 \end{cases}$. Como $x = 710$, entonces $710 + z = 1000$, $z = 290$

Sustituyendo en la 3ª ecuación, $y + 3 \cdot 290 = 1900$, $y = 1030$.

Luego, los precios por unidad son: 710 ptas el producto A ; 1030 ptas el B y 290 ptas el C

c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio.

Resolución

Como en la tienda del barrio son un 10% más caros, los precios por unidad serían:

710.1,1 = 781 ptas el producto A ; 1030.1,1 = 1133 ptas el B y 290.1,1 = 319 ptas el C

8.- Un almacenista ha mezclado aceite de girasol de coste 130 ptas litro con aceite de oliva de coste 250 ptas litro. La mezcla se vende a 225 ptas litro. Calcular los litros que ha mezclado de cada clase, sabiendo que ha utilizado 10000 litros más de aceite de girasol y que el 20% del precio de venta de 1 litro de mezcla es su ganancia.

Resolución

Si x son los litros de aceite oliva, los de aceite de girasol son $x + 10000$. Las ganancias son los ingresos menos los gastos.

Ingresos: $225 \cdot (x + 10000 + x) = 450x + 2250000$ Gastos: $130(10000 + x) + 250x = 380x + 1300000$

Ganancias por litro: $0,2 \cdot 225 = 45$ ptas litro Ganancias totales: $45(2x + 10000) = 90x + 450000$

Queda la ecuación $450x + 2250000 - (380x + 1300000) = 90x + 450000$

Operando, $70x + 950000 = 90x + 450000$; $500000 = 20x$; $x = 25000$.

Por tanto, mezcló 35000 litros de aceite de girasol y 25000 litros de aceite de oliva

9.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar B de manera que $AB = I_2$

Resolución

Como $A_{2 \times 3}$ y $I_{2 \times 2}$, para que tenga sentido la igualdad debe ser $B_{3 \times 2}$. Sea $B = \begin{pmatrix} a & d & b & e & c & f \end{pmatrix}$

$AB = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & b & e & c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + b + c & 2d + e + f & b + 2c & e + 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 . Igualando términos,

$\begin{cases} 2a + b + c = 1 \\ 2d + e + f = 0 \\ b + 2c = 0 \\ e + 2f = 1 \end{cases}$. De la 3ª ecuación, $b = -2c$ y queda

$\begin{cases} 2a - 2c + c = 1 \\ 2d + e + f = 0 \\ e + 2f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2d + e + f = 0 \\ e + 2f = 1 \end{cases}$

De la 3ª ecuación, $e = 1 - 2f$ y queda

$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2d + 1 - 2f + f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2a - 1 \\ f = 2d + 1 \end{cases}$. Dando valores a "a" y "d" se

obtienen infinitas soluciones. Tomemos por ejemplo $a = 0, d = 0$. Entonces, $c = -1, f = 1, e = -1, b = 2$.

Una de las infinitas soluciones es $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) ¿Contradice el resultado anterior el hecho de que una matriz que posee inversa debe ser cuadrada? Justifique la respuesta.

Resolución

No, porque en la definición de inversa de una matriz A la matriz A debe ser cuadrada. En el a) la matriz B no es la inversa de A , no tiene sentido

10.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) ¿Existen las matrices inversas de A y B ? Justificar la respuesta.

Resolución Como $\det A = -2 \neq 0$, existe A^{-1} y como $\det B = 0$, no existe B^{-1} .

b) Si es posible, calcular dichas matrices inversas.

Resolución $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{-2} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

c) Resolver la ecuación matricial $AXA^t = B$ (Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A)

Resolución

A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, y por $(A^t)^{-1}$, por

la derecha, nos queda $A^{-1}AXA^t(A^t)^{-1} = A^{-1}B(A^t)^{-1} = A^{-1}B(A^{-1})^t \Rightarrow X = A^{-1}B(A^{-1})^t$.

$$X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -8 & -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 80 & -56 & -50 & 35 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 20 & -14 & \frac{-25}{2} & \frac{35}{4} \end{pmatrix}$$

11.- Las velocidades medias de tres bicicletas (en km/h) vienen dadas por la matriz $V = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 24 \end{pmatrix}$.
 El número de horas que cada bicicleta pasea viene dado por $H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calcular los productos VH y HV .

Resolución

$$VH = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 & 48 & 64 & 96 & 72 & 96 & 144 \end{pmatrix} \quad HV = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \end{pmatrix}$$

b) Justificar si las matrices resultantes poseen inversa.

Resolución

Como

$$\det(VH) = |30 \ 40 \ 60 \ 48 \ 64 \ 96 \ 72 \ 96 \ 144| = |10 \cdot 3 \ 10 \cdot 4 \ 10 \cdot 6 \ 16 \cdot 3 \ 16 \cdot 4 \ 16 \cdot 6 \ 24 \cdot 3 \ 24 \cdot 4 \ 24 \cdot 6| = 10 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 155520$$

VH no tiene inversa y como $\det(HV) = 238 \neq 0$ HV sí que tiene inversa.

c) Interpretar los valores de los términos de las matrices resultantes.

Resolución

En VH sólo tienen significado los elementos de la diagonal principal y representan los km recorridos por cada bicicleta.

En HV , 238 significa que entre las tres bicicletas han recorrido 238 km

12.- Obtener la matriz X que verifica $AX - B = 3X$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución

Trasponiendo, $AX - 3X = B \Rightarrow AX - 3IX = B$. Sacando factor común X , por la derecha, $(A - 3I)X = B$

Llamando $C = A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, queda la ecuación $CX = B$

Como $\det C = 4 - 3 - 6 = -5 \neq 0$, existe C^{-1} . Multiplicando por C^{-1} , por la izquierda, $C^{-1}CX = C^{-1}B$

$$IX = X = C^{-1}B = \frac{1}{\det C} \cdot \text{adj}(C) \cdot B = \frac{1}{-5} \cdot \text{adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -122 & -394 & -6 & (-2 & -11) \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{5}(2 \quad -9 \quad -28) = \left(\frac{-2}{5} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{28}{5} \right)$$

13.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores a y b para que $AB = BA$.

Resolución

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 2 & 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a & 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{12 = 3b \quad 2 = 2a \quad 3a = 3 \quad 3b = 12\}$$

Resolviendo, $a = 1$, $b = 4$

b) Para $a = 1$, $b = 0$ resuelva la ecuación matricial $XB - A = I$.

Resolución

De $XB - A = I$, se tiene $XB = A + I$. Para $a = 1$, $b = 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $\det B = 1 \neq 0$, B es invertible.

Multiplicando por B^{-1} , por la derecha, nos queda $XB B^{-1} = (A + I) B^{-1} \Rightarrow X = (A + I) B^{-1}$

$$X = [\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] \frac{1}{1} \text{adj}(\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

OTROS DEL 1999 (COU II)

1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de "x" para los que existe la inversa de la matriz $C = AB - BA$.

Resolución

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2x & 5 & 7x & +2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 7 & 2x & 5x & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det C = (2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Luego, para $x \neq 1$, existe la inversa de C

b) Para $x = 2$, calcule la matriz inversa de B.

Resolución

Para $x = 2$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det B = 5 \neq 0$;

$$\exists B^{-1} = \frac{1}{5} \text{adj}(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5} \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{3}{5} \right)$$

2.- Dadas las rectas r, s, t del plano definidas por las ecuaciones r: $6x + 4y = 12$, s: $3x + 2y = 12$

y t: $x - y = 2$, halle la posición relativa de cada par de rectas.

Resolución

Como $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} \neq \frac{12}{12}$, $r \parallel s$; como $\frac{6}{1} \neq \frac{4}{-1}$, r y t son secantes; como $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$, s y t son secantes

3.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X tal que $AX = B$

Resolución

$\det A = 38 \neq 0$, A es invertible. Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, nos queda $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{38} \text{adj}(\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 45 & -11 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \left(\frac{45}{38} \quad \frac{-11}{38} \quad \frac{-1}{38} \quad \frac{1}{38} \right)$$

4.- Clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Resolución

De la 3ª ecuación $y = 2x$. Sustituyendo, $\begin{cases} x + 2x = 3 \\ x - 2 \cdot 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$; luego, $y = 2 \cdot 1 = 2$.

El sistema es compatible determinado y tiene como solución única $x = 1, y = 2$.

5.- Sean las rectas del plano r, s, t definidas por las ecuaciones $r: 2x - y - 1 = 0, s: 3x - 3y + 3 = 0, t: 6x + 2y - 18 = 0$. Determine la posición relativa de cada par de rectas.

Resolución

Como $\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-3}$, r y s son secantes; Como $\frac{2}{6} \neq \frac{-1}{2}$, r y t son secantes; como $\frac{3}{6} \neq \frac{-3}{2}$, s y t son secantes

6.- Sea S el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 6 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$
a) Resuelva dicho sistema.

Resolución

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_1, f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y = 6 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$. En la 2ª ecuación, $y = \frac{6}{5}$;
 $z = 2y = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$

En la 1ª ecuación, $x = z - y = \frac{12}{5} - \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$. La solución del sistema es $x = y = \frac{6}{5}, z = \frac{12}{5}$

b) Clasifique el sistema resultante si se suprime en S la primera ecuación.

Resolución

$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 6 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$; matrices de coeficientes y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el menor de A y A^* $|-1 \ 2 \ 2 \ -1| = -3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

c) ¿Qué ecuación debe suprimirse en el sistema S para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la solución $(0, 0, 0)$?

Resolución

Lógicamente suprimiendo la 2ª ecuación queda el sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ que tiene entre sus soluciones la solución $(0, 0, 0)$

7.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Obtenga, si existe, una matriz X tal que $AX + 2B = C$.

Resolución

De $AX + 2B = C$, se tiene $AX = C - 2B$; $\det A = 1 \neq 0$, A es invertible.

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, nos queda $A^{-1}AX = A^{-1}(C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - 2B)$

$$X = \frac{1}{1} \text{adj}(1 \ 0 \ 1 \ 1) [(1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 0 \ 1) - 2(1 \ 2 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0)] = (1 \ -1 \ 0 \ 1)(-1 \ -3 \ -1 \ 1 \ 2 \ 1) = (-2 \ -5 \ -$$

b) Obtenga, si existe, una matriz Y tal que $YA - B = C$.

Resolución

De $YA - B = C$, se tiene $YA = B + C$. Si $Y_{m \times n}$, como $A_{2 \times 2}$ y $(B + C)_{2 \times 3}$,

entonces $(YA)_{m \times 2} = (B + C)_{2 \times 3}$. Lo cual es imposible.

c) En ambos casos, razone la existencia o no de las matrices inversas de X y de Y.

Resolución

X no tiene inversa porque al no ser cuadrada no tiene sentido e Y no existe

8.- Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 8 \end{cases}$ añada una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Resolución

Basta añadir una ecuación que sea c.l. de las dadas, por ejemplo, la ecuación suma de las dadas:
 $3x + 4y = 10$

9.- La suma de dos cantidades es 500. Aumentando la primera en un 10% y disminuyendo la segunda en un 20%, la suma es 525. Plantee el sistema que obtiene tales cantidades.

Resolución

Sean x, y las cantidades. Usando el enunciado,

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 1,1x + 0,8y = 525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 500 \\ 11x + 8y = 5250 \end{cases}$$

10.- Halle una solución no nula del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Resolución

La matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 5y - 8z = 0 \end{cases}$.

En la 2ª ecuación $y = \frac{8z}{5}$; en la 1ª ecuación, $x = 2y - 3z = 2\frac{8z}{5} - 3z = \frac{z}{5}$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{k}{5}, y = \frac{8k}{5}, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Tomando por ejemplo $k = 5$, obtenemos una solución no nula $x = 1, y = 8, z = 5$

11.- Sean las rectas del plano r, s, t definidas por las ecuaciones

$$r: 2y + 2 = x, \quad s: 2x + y - 4 = 0, \quad t: y = -2x + 2$$

a) Estudie si el sistema formado por las ecuaciones tiene solución.

Resolución

El sistema es $\{r: x - 2y = -2, s: 2x + y = 4, t: 2x + y = 2\}$. Restando las ecuaciones de s y t obtenemos $0 = 2$ (imposible)

Luego, el sistema es incompatible, no tiene solución

b) Indique la posición relativa de cada par de rectas y calcule los puntos de corte entre ellas.

Resolución

- Como $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$, r y s son secantes. Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema

$$\{r: x - 2y = 2 \quad s: 2x + y = 4$$

De la 2ª ecuación $y = 4 - 2x$. Sustituyendo, $x - 2(4 - 2x) = 2$; $x = 2$, $y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$

Las rectas r y s se cortan en el punto $P(2, 0)$

- Como $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$, r y t son secantes. Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema

$$\{r: x - 2y = 2 \quad t: 2x + y = 2$$

De la 2ª ecuación $y = 2 - 2x$. Sustituyendo, $x - 2(2 - 2x) = 2$; $x = \frac{6}{5}$, $y = 2 - 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{-2}{5}$

Las rectas r y t se cortan en el punto $Q\left(\frac{6}{5}, \frac{-2}{5}\right)$

- Como $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{4}{2}$, r // s

12.- Resuelva el sistema de ecuaciones determinado por la igualdad $(x^2 + 2x + 3)(2y) = (2 + 3)$

Resolución

Operando queda el sistema

$$\{2x + y = 2 \quad 2 + 4x + 3y = 3 \Rightarrow \{2x + y = 2 \quad 2 \rightarrow 4x + 3y = 1 \Rightarrow \{4x + 2y = 4 \quad 4x + 3y = 1$$

Restando las ecuaciones, $y = -3$. Luego, $2x - 3 = 2$, $x = \frac{5}{2}$. La solución del sistema es $x = \frac{5}{2}$, $y = -3$

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A - I)B$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Resolución

$$(A - I)B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcule, si es posible, BA^t .

Resolución

Como $B_{3 \times 1}$ y $A^t_{3 \times 3}$ no se puede realizar BA^t porque el nº de columnas de B (1 columna) no coincide con el nº de filas de A^t (3 columnas)

c) ¿Es posible obtener la inversa de A?

Resolución Como $\det A = 2 - 2 = 0$, no existe A^{-1}