2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

ΘΕΜΑ Β

1. (**12685**) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β≠0, ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

β) $\alpha = \beta$.

2. (**12673**) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta <$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

3. (**12922**) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in R$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

4. (**13266**) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in R$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) (i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9) (ii) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

5. (**13323**) α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$. (Μονάδες 13)

6. (**14410**) Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$ και $B=(\beta-3)^2$.

α) (i) Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 9) (ii) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β έτσι, ώστε $A+B=0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε $A=-B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

7. (**14475**) Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2\leq\alpha\leq 4$ και $-4\leq\beta\leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha+2\beta$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha-\beta$. (Μονάδες 13)

8. (**14492**) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 13)

9. (**14704**) Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

10. (**35040**) Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$. (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ = Λ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.(Μονάδες 12)

11. (**36889**) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$. (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$. (Μονάδες 13)

12. (**37179**) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι: Κ≥Λ,για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ = Λ; (Μονάδες 13)

13. (**37817**) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}.$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = x^4 + x^2 + 2$. (Μονάδες 15)

β)(i) Να αιτιολογήσετε γιατί $\mathrm{A} > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}.$ (Μονάδες 5) (ii) Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

14. (**14329**) Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $\mathrm{A} = \frac{-\alpha}{\beta}$, $\mathrm{B} = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις Α, Β είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί Α, Β είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

15. (**14602**) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$.

(Μονάδες 12)

16. (**14713**) Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha},\ \alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει (i) $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$ (Μονάδες 8) (ii) $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Μονάδες 10)