

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

ΘΕΜΑ Β

1. (12685) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

β) $\alpha = \beta$.

2. (12673) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $\alpha < \beta < \frac{3}{\alpha}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

3. (12922) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

4. (13266) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) (i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9) (ii) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

5. (13323) α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$. (Μονάδες 13)

6. (14410) Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) (i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9) (ii) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

7. (14475) Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

8. (14492) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

9. (14704) Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

10. (35040) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

11. (36889) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$. (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$. (Μονάδες 13)

12. (37179) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; (Μονάδες 13)

13. (37817) Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$. (Μονάδες 15)

β)(i) Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$. (Μονάδες 5) (ii) Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

14. (14329) Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

15. (14602) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

16. (14713) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}, \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει (i) $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$ (Μονάδες 8) (ii) $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Μονάδες 10)