ISAM
Sabio Nacional Antúnez de Mayolo

Profesor: Lic. Salinas Shiguay Ruffo Emilio

LOGARITMOS EN R

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Dado un número real a > 0 y a $\neq$ 1, el logaritmo de un número x > 0 en la base a es el exponente y al que debe elevarse a, de manera que se cumpla que $a^y = x$. Es dedir:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x;\; x > 0;\; a > 0;\; a \neq 1$$

Además:

$\log_a x = y$ se lee “Logaritmo de x en base a es igual a y”

Ejemplos

- $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- $\log_{1/3} 243 = x \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$
- $\log_{1/2}(x^2 - x - 2) = -2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x^2 - x - 2$
- $\log_\pi \pi = 1 \leftrightarrow \pi^1 = \pi$
- $\log_{12} 12 = 1 \leftrightarrow 12^1 = 12$
- $\log_{100} 1 = 0$
- $\log_{1/5} 1 = 0$
- $\log_{(-2)} 1$ = no existe en R, ya que a = – 2 < 0
- $\log_{(-4)}(-4)$ = no existe en R, ya que a = – 4 < 0

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

De la definición de logaritmo $\log_a x = y$, tenemos que $a^y = x$.

Luego obtenemos la identidad fundamental:

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x > 0 \wedge a \in R^+ - \{1\}$$

Ejemplos

1) $3^{\log_3 5} = 5$

2) $(x^2+2)^{\log_{(x^2+2)} 4} = 4;\; x \in R$

2) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\log_{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} 3}$ = no existe en R, puesto que la base $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ es negativa

TEOREMAS SOBRE LOGARITMOS

Si los siguientes logaritmos existen en R, entonces se cumplen estos teoremas

Teorema 1: $\forall\, x > 0;\; \forall\, y > 0 \wedge a \in R^+ - \{1\}$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En general:
si $a \in R^+ - \{1\} \wedge \{x; y; z; \ldots\ldots; w\} \subset R^+$

$$\log_a(xyz\ldots w) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \ldots + \log_a w$$

Ejemplos

1) $\log_2 15 = \log_2(3)(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

2) $\log_4(3x) = \log_4 3 + \log_4 x;\; x > 0$

3) $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) = \log_3(x + 2)(x - 2)$
$\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) = \log_3(x^2 - 4);\quad x > 2$

4) Simplifique la expresión M.

$$M = \log_5\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_5\left(1+\frac{1}{3}\right) + \log_5\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots \ldots\ldots + \log_5\left(1+\frac{1}{49}\right)$$

Resolución

Aplicamos el teorema

$$M = \log_5 \left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\cdots\cdots\left(\frac{49}{48}\right)\left(\frac{50}{49}\right)\right]$$

$$M = \log_5 \left[\left(\frac{50}{2}\right)\right] = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5$$

$M = 2$

Teorema 2: $n;\ m \in R,\ x > 0$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$$

Consecuencias

$\log_a x^n = n\log_a x\ ;\quad n \in R \rightarrow \log_a a^n = n$

$\log_a x = \log_{a^n} x^n\ ;\quad n \in R$

$\log_a x = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{x}\ ;\quad n \in N,\ n \geq 2$

Ejemplos

1) $\log_2 2^{100} = 100\log_2 2 = 100$

2) $\log_3 \sqrt[5]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_3 3 = \frac{1}{5}$

3) $\log_{6^5} 6^{50} = \frac{50}{5}\log_6 6 = 10$

4) $\log_{32} 1\,024 = \log_{\sqrt[5]{32}} \sqrt[5]{1\,024} = \log_2 4 = 2$

5) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{\sqrt[3]{2}^3} 4^3 = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

6) $\log_3^2 x = (\log_3 x)(\log_3 x) \neq 2\log_3 x$

7) $\log_3^2 81 = (\log_3 81)^2 = (\log_3 3^4)^2 = (4)^2 = 16$

Teorema 3: $\forall\ a \in R^+ - \{1\} \wedge \{x;y\} \subset R^+$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Ejemplos

1) $\log_2 \left(\frac{5}{9}\right) = \log_2 5 - \log_2 9$

2) $\log_3 7 = \log_3 \left(\frac{21}{3}\right) = \log_3 21 - \log_3 3 = \log_3 21 - 1$

3) Calcule el valor de S

$$S = \log_2 \left(\frac{37}{23}\right) + \log_2 \left(\frac{3}{74}\right) - \log_2 \left(\frac{3}{92}\right)$$

Resolución

$$S = \log_2 \left(\frac{37}{23}\right)\left(\frac{3}{74}\right) - \log_2 \left(\frac{3}{92}\right)$$

$$S = \log_2 \left(\frac{3}{46}\right) - \log_2 \left(\frac{3}{92}\right)$$

$$S = \log_2 \left(\frac{\frac{3}{46}}{\frac{3}{92}}\right) = \log_2 2 = 1$$

$S = 1$

Teorema 4 (cambio de base)

Si $y;\ a \in R^+ - \{1\} \wedge x > 0$

$$\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

Ejemplos

1) $\log_5 3 = \frac{\log_6 3}{\log_6 5} = \frac{\log_\pi 3}{\log_\pi 5}$

2) $\frac{\log_{\sqrt{2}} 125}{\log_{\sqrt{2}} 25} = \log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}$

Consecuencias

a) $\forall\ x;\ y \in R^{+} - \{1\}$: $\quad \log_y x = \dfrac{\log_x x}{\log_x y}$

$\rightarrow \log_y x = \dfrac{1}{\log_x y} \quad \wedge \quad \log_y x \cdot \log_x y = 1$

b) Regla de la cadena

$$\log_x a \cdot \log_a y = \log_x y$$

En general

$\log_a x \cdot \log_x y \cdot \log_y z \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \log_w A = \log_a A$

Ejemplos

1) $\log_5 3 \cdot \log_3 7 = \log_5 7$

2) $\log_2 3 \cdot \cancel{\log_3 4} \cdot \cancel{\log_4 5} \cdot \cancel{\log_5 6} \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \cancel{\log_{31} 32}$
$= \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$

3) $S = \log_3 125 \cdot \log_6 81 \cdot \log_5 36$

$S = \left(\log_3 5^3\right)\left(\log_6 3^4\right)\left(\log_5 6^2\right)$

$S = (3)\ (4)\ (2)\ \log_3 5\ \log_6 3\ \log_5 6$

$S = (3)\ (4)\ (2)\ \log_3 5\ \cancel{\log_5 6}\ \cancel{\log_6 3}$

$S = 24 \log_3 3$

$S = 24$

c) Regla del intercambio $x;\ y > 0,\ a \in R^{+} - \{1\}$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

Ejemplos

1) $\log_4 6 = \dfrac{1}{\log_6 4} \quad \rightarrow \quad \log_4 6 \cdot \log_6 4 = 1$

2) $3^{\log_5 4} = 4^{\log_5 3}$

3) $2^{\log_4 (25)} = (25)^{\log_4 2} = (25)^{1/2} = 5$

4) Calcule el valor de E

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_3 40 + 2} + \frac{1}{\log_5 72 + 1}$$

Resolución

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + \log_2 8} + \frac{2}{\log_3 40 + \log_3 9} + \frac{1}{\log_5 72 + \log_5 5}$$

$$E = \frac{3}{\log_2 360} + \frac{2}{\log_3 360} + \frac{1}{\log_5 360}$$

$E = 3 \log_{360} 2 + 2 \log_{360} 3 + \log_{360} 5$

$E = \log_{360} 2^3 + \log_{360} 3^2 + \log_{360} 5$

$E = \log_{360} (2^3)\ (3^2)\ (5) = \log_{360} 360$

$E = 1$

SISTEMAS DE LOGARITMOS

De la definición de logaritmo se deduce que cualquier número positivo, diferente de la unidad, puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos; por lo tanto, el número de sistemas de logaritmos es ilimitado. Los más importantes son:

Sistema de logaritmos vulgares, decimales o de Briggs

Este sistema fue implementado por el matemático inglés Henry Briggs y tiene como base al número 10.

Notación

$\log N = \log_{10} N$ se lee "logaritmo decimal de N" o simplemente "logaritmo de N". No se escribe la base, pues se sobreentiende que es 10.

Ejemplos

1) $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

2) $\log 10\,000 = \log_{10} 10^4 = 4$

3) $\log 1\,000\,000 = \log_{10} 10^6 = 6$

4) $\log 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

5) $\log 0{,}01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$

6) $\log 0{,}0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$

Sistema de logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos

El matemático escocés Jhon Napier fue quién implementó este sistema cuya base es el número irracional e = 2,718281……….

Notación

ln N = $\log_e N$ se lee "logaritmo natural de N" c "logaritmo neperiano de N".

Ejemplos

1) ln e = $\ln_e e$ = 1

2) $e^{\ln 3} = e^{\ln_e 3} = 3$

3) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln_e e^{-1} = (-1)\ln_e e = -1$

4) $\ln\sqrt{e} = \ln_e e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln_e e = \frac{1}{2}$

5) $\ln e^x = \ln_e e^x = x\ln_e e = x$

6) $e^{x\cdot\ln 2} = 2^x$

PROBLEMAS RESUELTOS

1) Si $\log_a b = 2$ y $\log_b c = 3$, calcule el valor de M.

$M = \log_{a^3}(b^2c^4)$

Resolución

Por definición de logaritmos tenemos que:

$\log_a b = 2 \rightarrow b = a^2$

$\log_b c = 3 \rightarrow c = b^3$

Luego reemplazando "b" y "c" en M tenemos

$M = \log_{a^3}(b^2c^4) = \log_{a^3}((a^2)^2(b^3)^4)$

$M = \log_{a^3}(a^4 b^{12}) = \log_{a^3}(a^4 (a^2)^{12})$

$M = \log_{a^3}(a^4 a^{24}) = \log_{a^3}(a^{28})$

$M = \frac{28}{3}$

2) Si $\log_2 3 = m$, halle $\log_{36}243$ en términos de m

Resolución

Debemos expresar $\log_{36}243$ en función de $\log_2 3$

Como: $\log_{36}243 = \dfrac{1}{\log_{243}36} = \dfrac{1}{\log_{3^5}(2\times 3)^2}$

$\log_{36}243 = \dfrac{1}{\frac{2}{5}\left[\log_3 2 + \log_3 3\right]} = \dfrac{5}{2\left[\frac{1}{m}+1\right]}$

$\log_{36}243 = \dfrac{5m}{2(1+m)}$

3) Reduzca la siguiente expresión

$M = \log_8 16^{\log_4 3^{(\log_2 3)^{-1}}}$

Resolución

$M = \log_8 16^{\log_4 3^{\left(\frac{1}{\log_2 3}\right)}}$

$M = \log_8 16^{\log_4 3^{(\log_3 2)}} = \log_8 16^{\log_4 2}$

$M = \log_8 16^{\frac{1}{2}} = \log_{2^3}(2^2) = \frac{2}{3}$

PRÁCTICA DIRIGIDA

1) El valor de x en $2^x = 3$ es

2) La suma de los valores de x que verifican la ecuación $\log_2(x^2-1) = 3$ es igual a

3) El valor negativo de x que verifica $2^{3^{x^2}} = 8$ es

4) Si log2 = a y log3 = b, entonces el logaritmo de 18 es

5) Calcule el valor de S

$S = 2^{\log_4 5} - 5^{\log_4 2} + 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12}10}$

6) Calcule el valor de x que verifica la ecuación

$3^{\sqrt{x}} = 2$.

7) Reduzca la expresión

$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \log_{m+1} m$.

8) Si se cumple que: $\log_a bc = x^n$; $\log_b ac = y^n$; $\log_c ab = z^n$; $\forall$ n $\in$ N, calcule el valor de E.

$$E = \frac{1}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{1}{x^n+1}+\frac{1}{y^n+1}+\frac{1}{z^n+1}}\right]$$

9) Calcule el logaritmo de $a^m \cdot \sqrt[n]{a}$ en base $a^n \cdot \sqrt[m]{a}$, donde m; n $\in Z^+ - \{1\}$; $a > 0$ y $a \neq 1$

10) Sean a; b; c tres números diferentes de 1.

Si $x = \log_b c$; $y = \log_a c$, el valor de $\log_{ab} c$ es r; $ab \neq 1$. Calcule el valor de r.

11) Consideramos los números

$b_1 = 2$; $b_2 = 4$; $b_3 = 64$; $b_4 = 4\ 096$;

$b_5 = 2^{20}$; $b_6 = 2^{30}$. Si

$$(\log_{b1} x + \log_{b2} x + \log_{b3} x + \cdot \cdot \cdot + \log_{b6} x) = \frac{55}{6}$$

Calcule el valor de x

12) Resuelva la ecuación $2^x - 2^{\frac{x}{2}} = 6$

13) Resuelva la inecuación $4^x - 2^{x+1} - 3 \leq 0$

14) Calcule el mayor valor de x que verifica la inecuación $(2^x - 1)(2^x + 3)(2^x - 8) \leq 0$

15) Resuelva la inecuación $\log_2 (x^2 - 1) < 4$ e indique el mayor valor entero que la verifica