Методы решения уравнений высших степеней

Ветлова Наталья Вячеславовна
учитель математики МБОУ «СОШ №2» г. Киржач

Всё вокруг меня происходит математическим путём.
Мало иметь хороший ум, главное - хорошо его применять.
/Р.Декарт/

Чтобы решать уравнения высших степеней необходимо знать методы их решения. Но не всегда, зная методы решения уравнений, мы можем решать эти уравнения. Все заключается в том, какой метод является более рациональным при решении уравнений и не всегда можно решить уравнения высших степеней несколькими методами.
Задача школы состоит не только в том, чтобы передать ученикам определенную сумму знаний, но и в том, чтобы научить их творчески мыслить, подготовить к жизни и практической работе. Современный школьник нередко по-настоящему прикасается к творчеству через систему внеклассных мероприятий: кружки, факультативы и, конечно, олимпиады.
Целью олимпиады, кроме повышения интереса участников к изучению математики, является выявление особо глубоких и прочных знаний, умений, навыков, нестандартности подходов, креативности мышления.
Для успешного участия в олимпиадах требуется определенная предварительная подготовка с использованием специальной литературы. К сожалению, этой специальной литературы, призванной оказать ученику помощь в подготовке к олимпиаде, катастрофически не хватает. Этот пробел в какой-то степени устранит данный сборник олимпиадных задач, который позволит приобщить как можно больше учащихся к решению задач проблемного характера.

Для достижения поставленной цели, необходимо решить следующие **задачи:**

- Рассмотреть метод разложения на множители.
- Изучить схему Горнера и теорему Безу.
- Рассмотреть метод введения новой переменной.
- Сравнить методы решения и выбрать наиболее рациональный метод при решении уравнений высших степеней.

Уравнением высшей степени, называется уравнение вида:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений высшей степени.

1. Метод разложения на множители. Вынесение общего множителя. Группировка

Способ группировки можно разбить на 2 этапа:

Объединение членов многочлена в группы, имеющие общий множитель, и вынесение из каждой группы общего множителя.

Вынесение полученного общего для всех групп множителя за скобки.

Любой многочлен n-й степени может быть представлен в виде произведения

$f(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$, где c_1, c_2 …c_n – корни уравнения.

2.Метод понижения степени. Теорема Безу и схема Горнера.

Теорема Безу была открыта, как ни удивительно, Этьеном Безу, французским математиком, занимавшимся в основном алгеброй.

(1730-1783)

Теорему Безу, можно сформулировать следующим образом:

$$P(x) \vdots (x-\alpha)$$

P(x) — это какой-либо многочлен от x, (x — a) — это двучлен в котором a — это один из целых корней уравнения, который мы находим среди делителей свободного члена.

Три точки, это оператор, обозначающий, что одно выражение делится на другое. Из этого следует что, найдя хотя бы один корень данного уравнения, мы сможем применить к нему эту теорему. Но зачем нужна эта теорема, каково её действие? Теорема Безу — это универсальный инструмент, если мы хотим понизить степень многочлена. Например, при её помощи, кубическое уравнение, можно превратить в квадратное, биквадратное, в кубическое и т. д.

Но одно дело понять, а как поделить? Можно конечно, делить и в столбик, однако этот метод доступен далеко не всем, да и вероятность ошибиться очень высока.

Поэтому есть и иной путь, это схема Горнера.

(1786-1837)

Схема Горнера – способ деления многочлена

$P_n(x)=n\sum_{i=0} a_i x_{n-i}=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ на бином $x-a$.

Работать придётся с таблицей, первая строка которой содержит коэффициенты заданного многочлена. Первым элементом второй строки будет число a, взятое из бинома $x-a$:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	…	a_{n-1}	a_n
a							

После деления многочлена n-ой степени на бином $x-a$, получим многочлен, степень которого на единицу меньше исходного, т.е. равна $n-1$. Непосредственное применение схемы Горнера проще всего показать на примерах.

Пример

Разделить $5x^4+5x^3+x^2-11$ на $x-1$, используя схему Горнера.

Решение

Составим таблицу из двух строк: в первой строке запишем коэффициенты многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$, расположенные по убыванию степеней переменной x. Заметьте, что данный многочлен не содержит x в первой степени, т.е. коэффициент перед x в первой степени равен 0. Так как мы делим на $x-1$, то во второй строке запишем единицу:

$$5\cdot x^4+5\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x-11$$

	5	5	1	0	−11
1					

Начнем заполнять пустые ячейки во второй строке. Во вторую ячейку второй строки запишем число 5, просто перенеся его из соответствующей ячейки первой строки:

	5	5	1	0	−11
1	5				

Следующую ячейку заполним по такому принципу: $1\cdot5+5=10$:

	5	5	1	0	−11
1	5	10			

Аналогично заполним и четвертую ячейку второй строки: $1\cdot10+1=11$:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11		

Для пятой ячейки получим: $1\cdot11+0=11$:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	

И, наконец, для последней, шестой ячейки, имеем: $1\cdot11+(-11)=0$:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	0

Задача решена, осталось только записать ответ:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	0

$$5x^4+5x^3+x^2-11=(x-1)(5x^3+10x^2+11x+11)+0$$

Как видим, числа, расположенные во второй строке (между единицей и нулём), есть коэффициенты многочлена, полученного после деления $5x^4+5x^3+x^2-11$ на $x-1$. Естественно, что, так как степень исходного многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$ равнялась четырём, то степень полученного многочлена $5x^3+10x^2+11x+11$ на единицу меньше, т.е. равна трём. Последнее число во второй строке (ноль) означает остаток от деления многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$ на $x-1$.

В нашем случае остаток равен нулю, т.е. многочлены делятся нацело. Этот результат ещё можно охарактеризовать так: значение многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$ при $x=1$ равно нулю.

Можно сформулировать вывод и в такой форме: так как значение многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$ при $x=1$ равно нулю, то единица является корнем многочлена $5x^4+5x^3+x^2-11$.

3.Метод введения новой переменной.

В тех случаях, когда исходное уравнение может быть приведено к виду f(g(x)) =0, заменой t=g(x) уравнение сводится к решению уравнения f(t)=0. Далее для каждого полученного корня tk решается уравнение g(x)=tk.

Пример № 1.

Решить уравнение**: $x^3+3x^2-6x-8=0$**

Решим данное уравнение методом разложения его на множители.

Сгруппируем 1 и 4, 2 и 3 слагаемые, тогда получим:

$$x^3-8+3x^2-6x=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)+3x(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2+5x+4)=0$$

$$x-2=0 \qquad x^2+5x+4=0$$

x=2 используя обратную теорему Виета, получаем x= -1, x= -4

Ответ: - 4, -1, 2.

Решим данное уравнение, используя схему Горнера

$x^3+3x^2-6x-8=0$

Легко убедиться, что корнем этого уравнения будет число – 1. Поделим данный многочлен на x-(-1)=x+1. Найдем коэффициенты многочлена по схеме Горнера.

	1	3	-6	-8
-1	1	2	-8	0

Получим разложение многочлена на множители: **$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$.**

По обратной теореме Виета найдем корни, приравняв второй многочлен к нулю.

x=2, x= -4.

Ответ: -4, -1, 2.

Вывод: Решение уравнения по схеме Горнера оказалось более рациональным. Не пришлось применять группировку и применять формулу разности кубов.

Пример № 2.

Решить уравнение**:** $x^4-x^3-13x^2+x+12=0$

Решим данное уравнение методом разложения его на множители.

Для этого $13x^2=12x^2+x^2$, получим:

$x^4-x^3-12x^2-x^2+x+12=0$

$(x^4-x^3-12x^2)-(x^2-x-12)=0$

$x^2(x^2-x-12)-(x^2-x-12)=0$

$(x^2-x-12)(x^2-1)=0$

$x^2-x-12=0$ **или** $x^2-1=0$

По обратной теореме Виета находим корни $x= -3, x=4.$

У второго уравнения корни $x=1$, $x= -1$

Ответ: -3, -1, 1, 4.

Решим данное уравнение, используя схему Горнера.

Нетрудно убедиться, что числа **1 и – 1** являются корнями данного уравнения, тогда составим таблицу коэффициентов по схеме Горнера.

	1	-1	-13	1	12
1	1	0	-13	-12	0

	1	0	-13	-12
-1	1	-1	-12	0

В итоге получаем: $x^4-x^3-12x^2-x^2+x+12=(x-1)(x+1)(x^2-x-12)=0$

Уравнение $x^2-x-12=0$ разложим на множители, по обратной теореме Виета корни будут **-3 и 4.**

Ответ: -3, -1, 1. 4.

Вывод: Решение уравнения по схеме Горнера оказалось более рациональным, так как разложить уравнение на множители вызывает большие затруднения.

Пример № 3.

Решите уравнение: $(x^2-6x)^2-2(x^2-6x+9)=81$

1 способ. Решим данное уравнение методом введения новой переменной

$x^2-6x=t$

$t^2-2(t+9)=81$

$t^2-2t-99=0$

$t_1=-9 \quad t_2=11$

$x^2-6x=-9$ **или** $x^2-6x=11$

$x^2-6x+9=0 \qquad x^2-6x-11=0$

$(x-3)^2=0 \qquad Д=36+44=80$

$x=3 \qquad x=\frac{6+4\sqrt{5}}{2}$ или $x=\frac{6-4\sqrt{5}}{2}$

$x=3+2\sqrt{5} \qquad x=3-2\sqrt{5}$

Ответ: 3, $3+2\sqrt{5}$, $3-2\sqrt{5}$

2 способ. Решим данное уравнение с помощью схемы Горнера

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$x^4-12x^3+36x^2-2x^2+12x-18-81=0$

$x^4-12x^3+34x^2+12x-99=0$

	1	-12	34	12	-99
3	1	-9	7	33	0
3	1	-6	-11	0	

$x^2-6x-11=0$

$x=3+2\sqrt{5} \qquad x=3-2\sqrt{5}$

Ответ: 3, $3+2\sqrt{5}$, $3-2\sqrt{5}$

Вывод: Такого вида уравнения удобнее решать методом введения новой переменной, так как по схеме Горнера найти корень, равный 3, будет затрачено больше времени.

Пример №4.

$x(x-1)(x+1)(x+2)=24$

1 способ. Решим данное уравнение методом введения новой переменной, для этого сгруппируем множители:

$((x-1)(x+2))\ (x(x+1))=24$

$(x^2+x-2)(x^2+x)=24$

$x^2+x=t \qquad t(t-2)=24$

$t^2-2t-24=0$

$Д=4+96=100$

$t_1=6$ $t_2=-4$

$x^2+x=6$ или $x^2+x=-4$

$x^2+x-6=0$ $x^2+x+4=0$

$x_1=-3$ $x_2=2$ Д=1-16=-15, Д<0, корней нет.

Ответ: -3; 2.

2 способ. Решим данное уравнение с помощью схемы Горнера, для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$(x^2-x)(x^2+3x+2)=24$

$x^4+3x^3+2x^2-x^3-3x^2-2x-24=0$

$x^4+2x^3-x^2-x^3-2x-24=0$

	1	2	-1	-2	-24
2	1	4	7	12	0
-3	1	1	4	0	

$(x-2)(x+3)(x^2+x+4)=0$

$x^2+x+4=0$, корней нет, так как дискриминант отрицательный

Ответ: -3; 2.

Вывод: Данный вид уравнений удобнее решать схемой Горнера, потому что трудно выбрать какие скобки перемножить для получения хорошей замены.

Проанализировав некоторые методы решения уравнений высших степеней, мы пришли к выводу, что нет однозначного метода решения уравнений, каждый для себя может выбрать более рациональный метод. Тот метод, который ему кажется более удобным. Поэтому ученики должны владеть различными методами решения уравнений.

Практическая работа

1. Решите уравнения методом введения новой переменной:
   а) $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$
   б) $(x^2-x+2)^2-3(x^2-x+3)=1$
   в) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$
   г) $(x+3)(x^2-4)(x+7)+96=0$

2. Решите уравнения, используя схему Горнера:
   а) $2x^3+7x^2-28x+12=0$
   б) $x^3+3x^2-10x-24=0$
   в) $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$
3. Решите уравнения, используя более рациональный метод:
   а) $x^8-x^7-5x^6+3x^5+9x^4-3x^3-7x^2+x+2=0$
   б) $x^3+2x^2-7x-12=0$
   в) $x^4+2x^3-5x^2-4x+6=0$

г) $x^5-x^4-5x^3+5x^2+4x-4=0$
д) $x^3+9x^2+23x+15=0$
е) $x^3-4x^2+x+6=0$

Литература:

А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир
Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов/Под ред. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.-м.:Илекса,2003.
В.Г.Болтянский, Ю.В.Сидоров, М.И.Шабунин
Лекции и задачи по элементарной математике М., 1974г., 576 стр. с илл.
Прохоренко В.И., Сафонов В.Ф.
Сборник задач по математике (с основами теории и методическими указаниями):Учебное пособие для до вузовской подготовки.-М. Издательство МЭИ, 2000.

Интернет ресурсы:

https://habr.com/ru/post/484902/
https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-po-matematike-uravneniya-vysshih-stepenej-4570687.html
https://matematushka.ru/Zadachi_Ege/7
https://math1.ru/education/raznoe/gorner.html
http://matematikaiskusstvo.ru/zitat.html