

**Bài 1: (3,0 điểm)**

Cho  $A = 4 - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x+x}}{\sqrt{x}} + x$

a) Rút gọn A.

b) Tìm  $x$  để A nhận giá trị nhỏ nhất.

**Bài 2: (2,0 điểm)**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2007} + \sqrt{y} = \sqrt{2007} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+2007} = \sqrt{2007} \end{cases}$$

**Bài 3: (3,0 điểm)**

Giải phương trình:  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

**Bài 4: (3,0 điểm)**

Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x + y = 4$

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + 1994,5$ .

**Bài 5: (3,0 điểm)**

Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BM vuông góc với AC, gọi N là trung điểm của AM, P là trung điểm của CD. Chứng minh:  $\angle BNP = 90^\circ$ .

**Bài 6: (3,0 điểm)**

Cho  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ). Đường cao AH, kẻ HE vuông góc với AC, gọi O là trung điểm của EH. Chứng minh:  $AO \perp BE$

**Bài 7: (3,0 điểm)**

Cho  $\triangle ABC$  Có  $AB = c, AC = b, BC = a$ .

Chứng minh rằng:  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

PGD KRÔNG PẮC

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG CẤP HUYỆN – NĂM

Môn : Toán- Lớp 9

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1: a) Đ/K:  $x > 0$

0.5 điểm

$$A = 4 - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} + x$$

0.5

điểm

$$= x - 2\sqrt{x} + 3$$

0.5

điểm

b)  $A = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x > 0$

0.5 điểm

$$\text{Min}A = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TMĐK)}$$

1.0 điểm

Bài 2:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2007} + \sqrt{y} = \sqrt{2007} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+2007} = \sqrt{2007} \end{cases}$$

ĐK:  $x \geq 0; y \geq 0$

0.5

điểm

$$\Rightarrow \sqrt{x+2007} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2007}$$

0.5

điểm

$$\sqrt{x} + \sqrt{2007+y} \geq \sqrt{2007}$$

0.5

điểm

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

0.5 điểm

Bài 3:  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

$$\text{ĐK: } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \quad 0.5$$

điểm

Áp dụng Bunhiacopski

$$\text{VT: } 1.\sqrt{2x-3} + 1.\sqrt{5-2x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2x-3+5-2x)} = 2 \quad (1) \quad 0.5$$

điểm

$$\text{VP: } 3x^2 - 12x + 14 = 3(x-2)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x \quad (2)$$

0.5 điểm

$\Rightarrow$  Phương trình:  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$  có nghiệm  $\Leftrightarrow$  Dấu “=” xảy ở (1) và (2) đồng thời xảy ra.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3} = \sqrt{5-2x} \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

1.5

điểm

**Bài 4:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$  thì  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$  dấu “=”  $\Leftrightarrow a = b$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad \text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

0.5 điểm

$$\begin{aligned} A &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + 1994,5 \geq \frac{1}{2} \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + 1994,5 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(x + y + \frac{4}{x+y}\right)^2 + 1994,5 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{4}{4}\right)^2 + 1994,5 \\ &= 2007 \end{aligned}$$

1.0 điểm

$$\Rightarrow A \geq 2007 \quad \text{Do đó } \text{Min}A = 2007 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$$

0.5 điểm

### **Bài 5:**

Gọi I là trung điểm của BM.

NI cắt BC tại E.

Ta có NI là đường trung bình của  $\triangle BMA$ .

$$\Rightarrow NI \parallel AB \text{ và } NI = \frac{1}{2} AB. \quad 0.5 \text{ điểm}$$

$$AB \perp BC \Rightarrow NI \perp BC \text{ tại E} \quad 0.5 \text{ điểm}$$

$$\Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \triangle BCN \Rightarrow CI \perp BN \text{ (1)} \quad 0.5 \text{ điểm}$$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} IN = \frac{1}{2} AB \\ CP = \frac{1}{2} CD \end{array} \right\} \text{ mà } AB = CD \Rightarrow IN = CP \quad \Rightarrow \text{CINM là hình bình hành} \Rightarrow CI$$

// NP (2)                      0.5 điểm

$$\left. \begin{array}{l} IN // AB \\ AB // CP \end{array} \right\} \Rightarrow IN // CP$$

0.5

điểm

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow NP \perp BN$  tại N  $\Rightarrow \sphericalangle BNP = 90^\circ$   
0.5 điểm

**Bài 6:**

Kẻ  $BD \perp AC \Rightarrow \sphericalangle CBD = \sphericalangle HAC$  ( cùng phụ với  $\sphericalangle C$  )

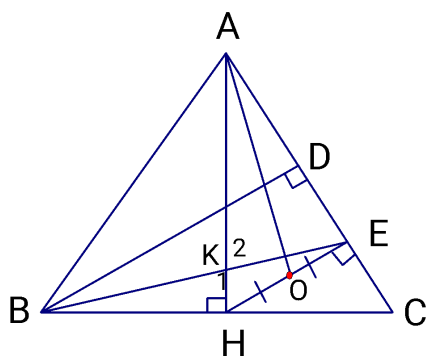
$$\Rightarrow \triangle BDC \simeq \triangle EAH \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{CD}{EH}$$

0.5 điểm

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDC \text{ có } BH = HC \text{ ( } \triangle ABC \text{ cân tại A)} \\ HE // BD \text{ (cùng } \perp AC) \end{array} \right\} \Rightarrow DE = EC = \frac{CD}{2}$$

0.5 điểm

HE // BD (cùng  $\perp$  AC)



$$\Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{CD}{EH} = \frac{2CE}{2HO} = \frac{CE}{HO}$$

điểm

$\triangle CBE$  và  $\triangle HAO$  có  $\sphericalangle BCE = \sphericalangle AHO$  (  $\triangle BDC \simeq \triangle EAH$  )

$$\frac{BC}{AH} = \frac{CE}{HO}$$

$$\Rightarrow \triangle CBE \simeq \triangle HAO \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CBE = \sphericalangle HAO$$

0.5

điểm

Gọi K là giao điểm của AH và BE.

Ta có:  $\sphericalangle CBE + \sphericalangle K_1 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{HAO} + \widehat{K}_1 = 90^\circ \quad (\text{Vì } \widehat{K}_1 = \widehat{K}_2, \widehat{CBE} = \widehat{HAO})$$

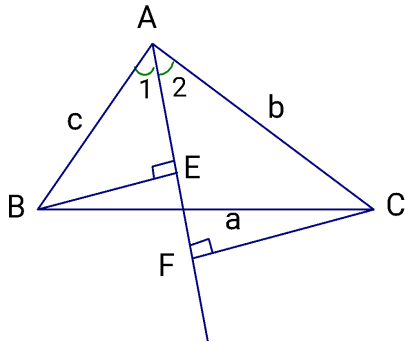
0.5

điểm

$$\Rightarrow AO \perp BE.$$

0.5 điểm

**Bài 7:**



Kẻ phân giác AD của  $\widehat{BAC}$

kẻ  $BE \perp AD; CF \perp AD$

$\Delta BED$  vuông tại E  $\Rightarrow BE \leq BD$

$\Delta CFD$  vuông tại F  $\Rightarrow CF \leq CD$

$$\Rightarrow BE + CF \leq BD + CD = a$$

0.5 điểm

$$\Delta ABE (\widehat{E} = 1v) \Rightarrow BE = AB \cdot \sin A_1 = c \cdot \sin$$

$$\frac{A}{2}$$

0.5 điểm

$$\Delta ACF (\widehat{F} = 1v) \Rightarrow CF = AC \cdot \sin A_2 = b \cdot \sin \frac{A}{2} \quad 0.5 \text{ điểm}$$

$$\Rightarrow BE + CF = (b + c) \sin \frac{A}{2} \leq a \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

0.5 điểm

$$b > 0; c > 0 \text{ áp dụng bất đẳng thức Côsi: } b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \Rightarrow \sin \frac{A}{2}$$

$$\leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \quad 0.5 \text{ điểm}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}; \sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}$$

0.5 điểm

\*\*\*\*\*