Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP	PAU
2024/25	2024/25
AZTERKETA EREDUA	MODELO DE EXAMEN
GG.ZZ.-ei APLIKATUTAKO MATEMATIKAK II	*MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS.*

EUSKO JAURLARITZA — GOBIERNO VASCO
HEZKUNTZA SAILA — DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

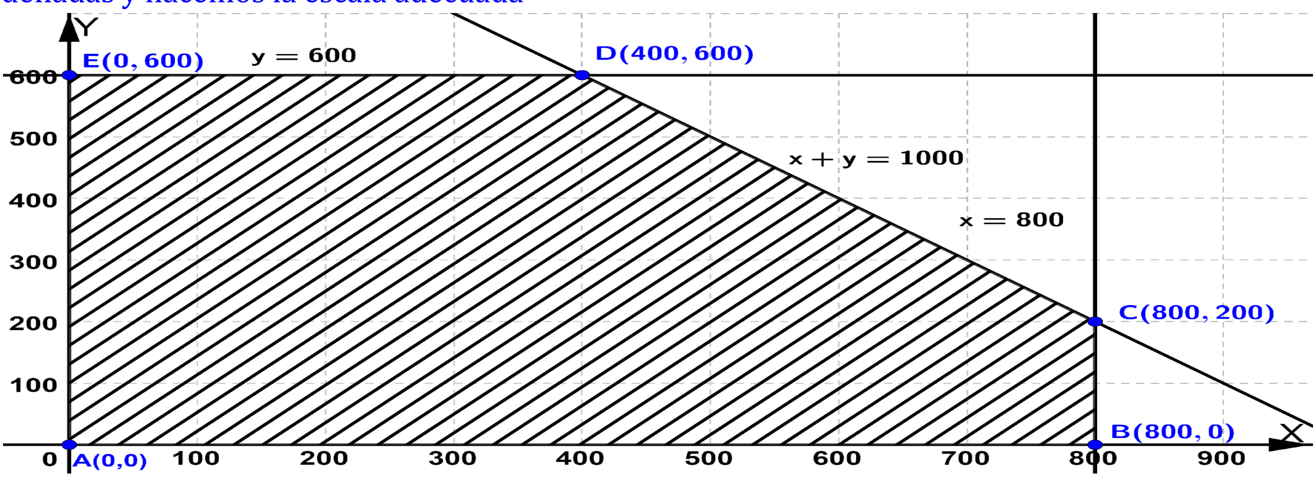
• El examen costa de cinco problemas:
o Problema 1: de opción única y obligatoria.
o Problemas del 2 al 5: de los cuatro problemas debes elegir TRES problemas.
En cada uno de los problemas seleccionados hay que responder a uno de los apartados (por ejemplo: apartado 2.1 o apartado 2.2)
• En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]
La industria de la relojería ha visto un resurgimiento en la demanda de productos tradicionales y una determinada fábrica de relojes que se encuentra en un momento crucial de su desarrollo, quiere aprovechar esta tendencia.
Sin embargo, se enfrenta a ciertas restricciones de producción, como la capacidad de maquinaria, la disponibilidad de materiales y la mano de obra especializada, lo que le hace limitar la fabricación diaria a 1000 unidades.
El análisis que realiza la fábrica se centra en determinar si es más viable producir relojes de pulsera o de bolsillo y en qué medida puede optimizar este proceso productivo. Para ello, considera varios factores.
En cuanto a la facturación, hay una diferencia importante, la unidad de reloj de pulsera la vende a 90 euros, mientras que por cada uno de bolsillo ingresa 120 euros.
Por otra parte, las limitaciones de empleo de maquinaria, así como la duración de las jornadas del personal especializado, impiden la fabricación de más de 800 relojes de pulsera al día y de más de 600 de bolsillo.
Atendiendo a la situación de esta fábrica, responda a los apartados a) y b):
a) [2,2 puntos] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?
b) [0,3 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

Resolución

Sean x, y el nº de relojes de pulsera y de bolsillo, respectivamente. Usamos el enunciado:
Función a optimizar (maximizar), el ingreso $f(x, y) = 90x + 120y$; restricciones:
$\{x + y \le 1000 \;\; x \le 800 \;\; y \le 600 \;\; x, \; y \ge 0$

Obtengamos la región factible, solución del sistema de inecuacioens. Para ello dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice, A(0, 0), B(800, 0), C(800, 200), D(400, 600) ó E(0, 600) alcanza el valor máximo el ingreso $f(x, y) = 90x + 120y$

$f(A) = f(0, 0) = 90.0 + 120.0 = 0$ $f(B) = f(800, 0) = 90.800 + 120.0 = 72000$

$f(C) = f(800, 200) = 90.800 + 120.200 = 96000$ $f(D) = f(400, 600) = 90.400 + 120.600 = 108000$

$f(E) = f(0, 600) = 90.0 + 120.600 = 72000$

El ingreso máximo es 108000 € y se obtiene con 400 relojes de pulsera y 600 de bolsillo.

PROBLEMA 2
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2
APARTADO 2.1 [2,5 puntos]
En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.
La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40% más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.
¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Resolución

Sean x, y, z la puntuación de Aitor en el problema 1, 2, y 3, respectivamente.

Según el enunciado,
$\begin{cases} x + y + z = 7,2 \\ x = 1,4y \\ z = 2(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,4y + y + z = 7,2 \\ z = 2(1,4y) + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,4y + z = 7,2 \end{cases}$

$2,4y + 4,8y = 7,2$; $7,2y = 7,2$; $y = 1$; $z = 4,8 . 1 = 4,8$; $x = 1,4 . 1 = 1,4$

Aitor obtuvo 1,4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4,8 puntos en el tercero

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]
a) [1,25 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Operando e igualando obtenemos el sistema
$\begin{cases} 3y + 2(1-2x) = -1 \\ 2y + 2(x+1) + 2 = 2 \\ 2 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 2x + 2y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$
Multiplicamos la 2ª ecuación por 2: $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 4x + 4y = -4 \end{cases}$. Restamos las ecuaciones: $7y = -7$, $y = -1$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $4x - 3(-1) = 3$, $x = 0$

La solución es $x = 0$, $y = -1$, $z = -2$

b) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^tA^{-1}$.

Resolución

$\det A = -2 \neq 0$, $\exists A^{-1}$;
$M = A^t \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$M = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

PROBLEMA 3
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2
APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.
a) [0,75 puntos] ¿Disminuye el coste alguna vez?
b) [0,5 puntos] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

Resolución

$f'(x) = -6 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $f''(x) = 2$; $f''(3) = 2 > 0$

Mínimo relativo: $x = 3$, $y = f(3) = 40 - 6.3 + 3^2 = 31$; f es decreciente en $(0, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$

a) el coste desde 0 unidades hasta 3 unidades

b) el coste mínimo es de 31000 € y se produce para 3 unidades

c) [0,25 puntos] ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

Resolución Nos piden $f(0) = 40 - 6.0 + 0^2 = 40$. El coste sería de 40000 €

d) [0,75 puntos] Si el coste fuera 80000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

Resolución

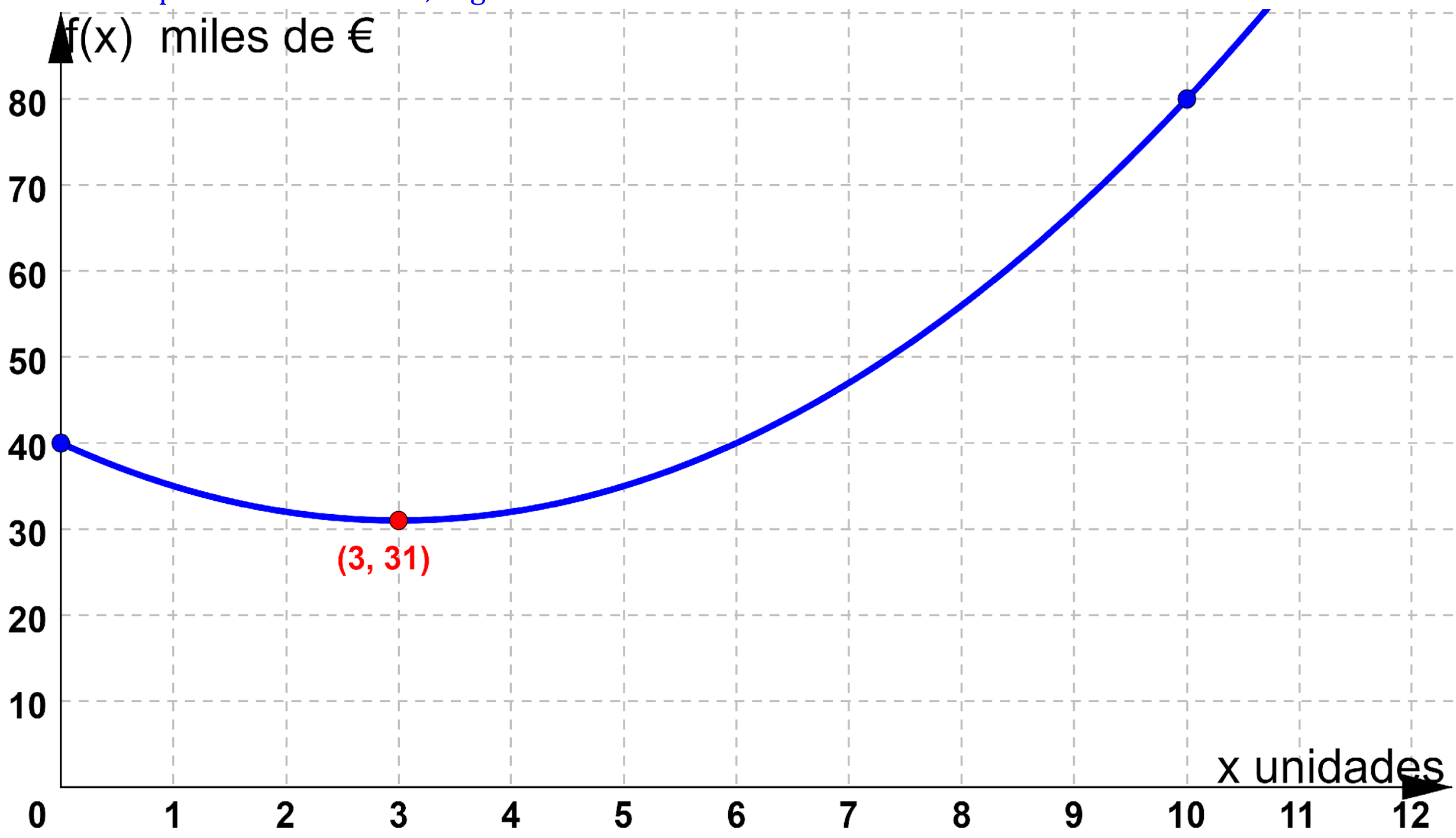
En este caso $f(x) = 40 - 6x + x^2 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0$, $x = \frac{6 \pm 14}{2}$; como $x \geq 0$, debe ser $x = 10$

La cantidad producida es 10 unidades

e) [0,25 puntos] Representa gráficamente la función.

Resolución

Usando los apartados anteriores, la gráfica sería



APARTADO 3.2 [2,5 puntos]
a) [0,75 puntos] Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Resolución

$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$; $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$; $f''(x) = 6ax + 6$

f tiene una inflexión en $x = -1 \Rightarrow 0 = f''(-1) = 6a(-1) + 6 \Rightarrow a = 1$. Queda $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + b$

f pasa por $(1, -3) \Rightarrow -3 = f(1) = 1^3 + 3.1^2 - 5.1 + b \Rightarrow -3 = -1 + b \Rightarrow b = -2$

Conclusión: $a = 1, b = -2$ quedando $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

b) [1 punto] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

Resolución

$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$. Hagamos una tabla de signos de $g'(x)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	–	0	+
$g(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

g es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 2)$

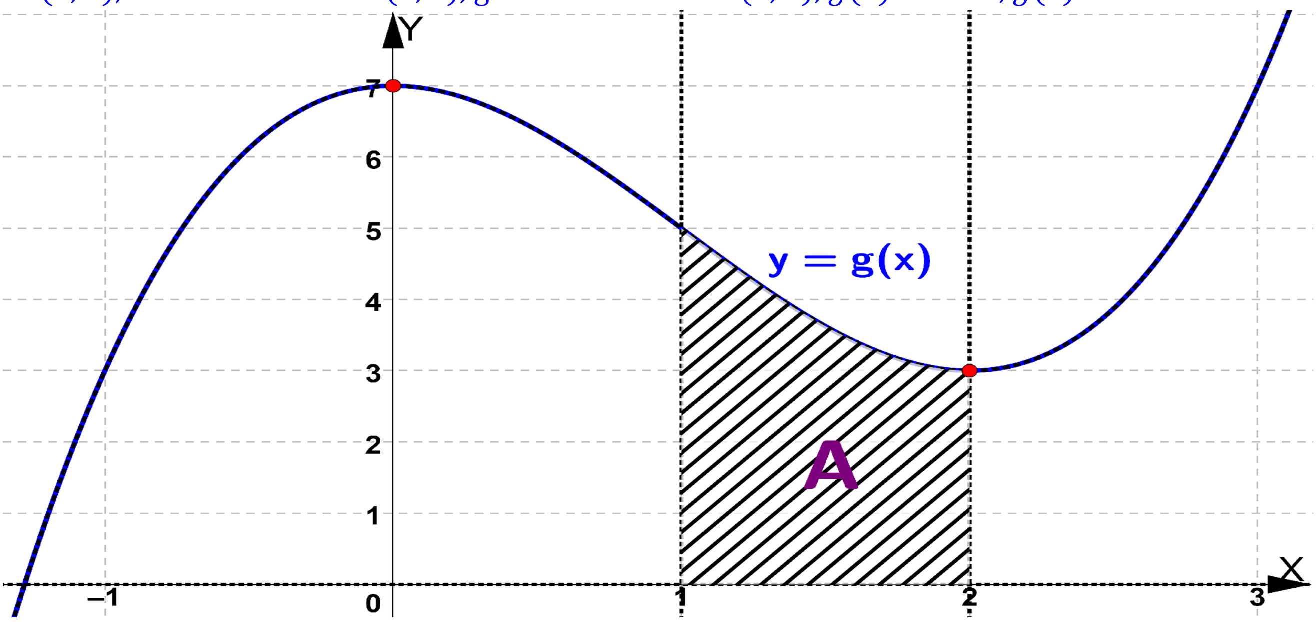
Máximo relativo: $x = 0, y = g(0) = 0^3 - 3.0^2 + 7 = 7$; punto $(0, 7)$

Mínimo relativo: $x = 2, y = g(2) = 2^3 - 3.2^2 + 7 = 3$; punto $(2, 3)$

c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región delimitada por la función g(x), el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1, x = 2$; y haz su representación gráfica.

Resolución

Para la representación de la gráfica de g y de la región cuya área se pide observa que el máximo relativo de g es $(0, 7)$, el mínimo relativo $(2, 3)$, g es decreciente en $(0, 2)$, $g(x) = -\infty$, $g(x) = +\infty$



El área que piden es $A = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 7)dx$. Una primitiva de g

es $G(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 7x = \frac{x^4 - 4x^3 + 28x}{4}$. Por la regla de Barrow,

$A = G(2) - G(1) = \frac{2^4 - 4.2^3 + 28.2}{4} - \frac{1^4 - 4.1^3 + 28.1}{4} = \frac{15}{4} = 3,75\ u^2$

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 [2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color.

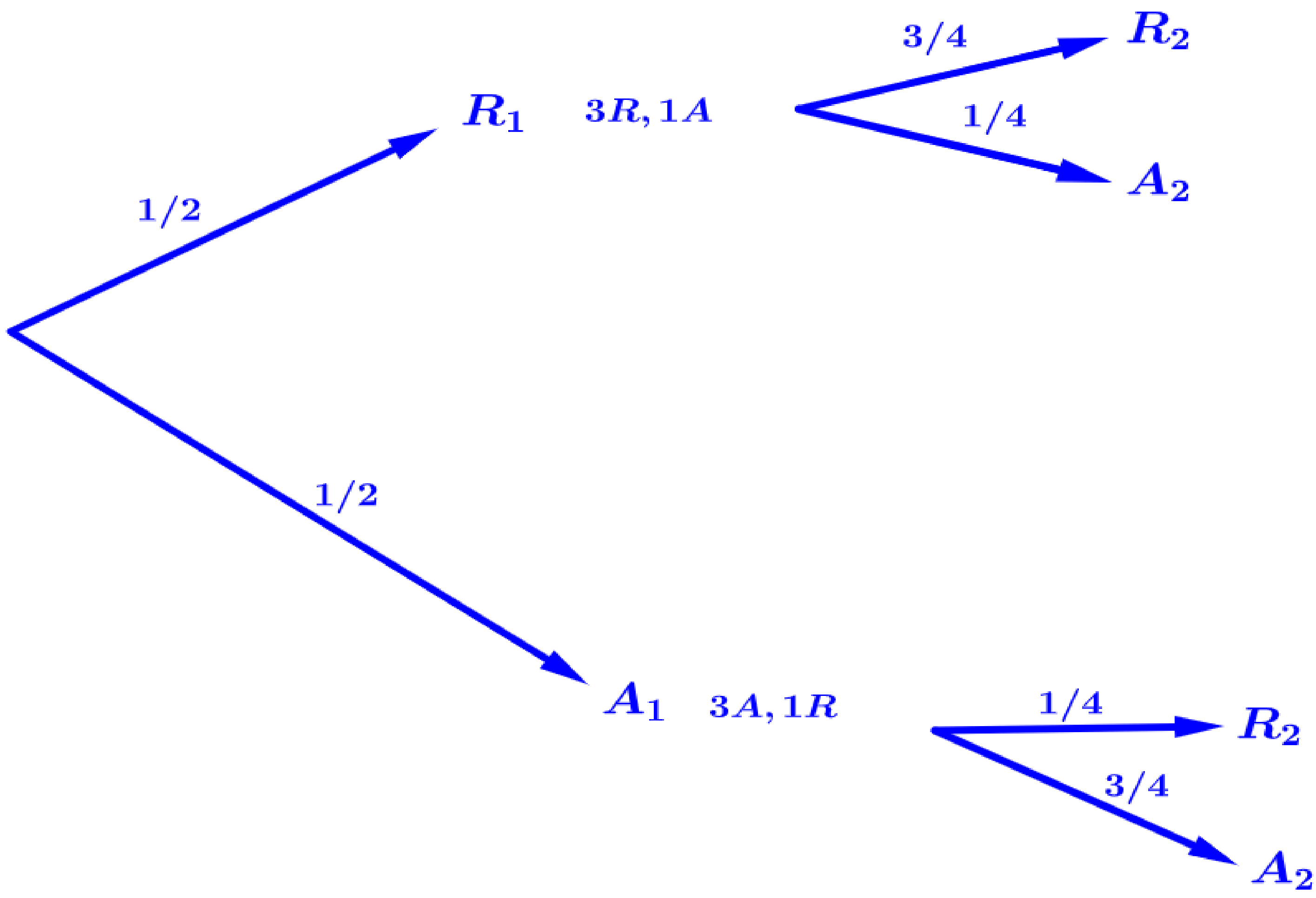
a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

b) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Resolución

Hacemos un diagrama de árbol de probabilidades



a) Se pide $p\left(\frac{R_2}{A_1}\right) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

b) Piden $p(A_2)$, que, usando el teorema de probabilidad total, es

$p(A_2) = p(R_1)p(A_2/R_1) + p(A_1)p(A_2/A_1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

c) Se pide $p\left(\frac{R_1}{A_2}\right) = \frac{p(R_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(R_1)\,p(A_2/R_1)}{p(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]
Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.
a) [0,75 puntos] Sabemos que p(A) = 0,4 ; p(B) = 0,3 y p(A ∪ B) = 0,5. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

Resolución

Se pide p(A ∩ B). Como p(A ∪ B) = p(A) + p(B) − p(A ∩ B), despejando

p(A ∩ B) = = p(A) + p(B) − p(A ∪ B) = 0,4 + 0,3 − 0,5 = 0,2

b) [1 punto] Sabemos que p(C) = 0,5 ; p(D) = 0,6 y p(C ∪ D) = 0,7. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

Resolución

Observa que p(C ∪ D) = p(C) + p(D) − p(C ∩ D), despejando

p(C ∩ D) = = p(C) + p(D) − p(C ∪ D) = 0,5 + 0,6 − 0,7 = 0,4

Se pide $p\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \cong 0,6667$

c) [0,75 puntos] Sabemos que p(A) = 0,4 ; p(E) = 0,6 y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Resolución

Como A y E son independientes, p(A ∩ E) = p(A) p(E) = 0,4 . 0,6 = 0,24

Se pide p(A ∪ E) = p(A) + p(E) − p(A ∩ E) = 0,4 + 0,6 − 0,24 = 0,76

PROBLEMA 5
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2
APARTADO 5.1 [2,5 puntos]
En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.
a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80%.

Resolución

X = tiempo, en minutos $\rightarrow N\left(210, \sqrt{144}\right) = N(210,\ 12)$.

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 98% para el tiempo medio, 210 es $I_c = (210 - E, 210 + E)$, siendo $E = z_{\alpha/2}. \sigma$, el máximo error de estimación.

es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,98}{2} = 0,99$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,99$ *usando la tabla de la* $N(0, 1)$, *por interpolación* $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,285$.
Sustituyendo,

$E = z_{\alpha/2} . \sigma = 1,285 . 12 = 15,42$; $I_c = (210 - 15,42 ; 210 + 15,42) = (194,58 ; 225,42)$

b) [0,3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
c) [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
d) [04 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Resolución

Sabemos que X = tiempo, en minutos $\rightarrow N\left(210, \sqrt{144}\right) = N(210,\ 12) \Rightarrow\ \ Z = \frac{X - 210}{12} \rightarrow N(0,\ 1)$.

b) Piden
$p(X > 228) = p\left(\frac{X-210}{12} > \frac{228-210}{12}\right) = p(Z > 1,5) = 1 - p(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 6,68\%$

c) Se pide $p(200 < X < 210) = p\left(\frac{200-210}{12} < \frac{X-210}{12} < \frac{210-210}{12}\right) \cong p(-0,83 < Z < 0) =$

$= p(Z < 0) - p(Z < -0,83) = p(Z < 0) - [1 - p(Z < 0,83)] = 0,5 - 1 + 0,7967 = 0,2967 = 29,67\%$

d) Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\overline{X}$ = media de las muestras de tamaño n, entonces $\overline{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso $\mu = 210$, $\sigma = 12$ y $n = 30$

Sustituyendo, $\overline{X} \rightarrow N\left(210,\ \frac{12}{\sqrt{30}}\right) \cong N(210 ; 2,19)$ entonces la variable $Z = \frac{\overline{X} - 210}{2,19} \rightarrow N(0,\ 1)$.

Piden $p(\overline{X} < 207) = p\left(\frac{\overline{X}-210}{2,19} < \frac{207-210}{2,19}\right) \cong p(Z < -1,37) = p(Z > 1,37) = 1 - p(Z \leq 1,37) =$

$= 1 - 0,9147 = 0,0853 = 8,53\%$

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]
Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:
$\overline{x} = 98$ puntos y $s = 15$ puntos. Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos". ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Resolución

X = coeficiente intelectual $\rightarrow N(\mu,\ 15)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del n_c para estimar la media, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, $\overline{x} = 98$ la media de la muestra de tamaño n = 100 y $E = z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación. Nos dicen que, $I_c = (94,5 ; 101,5)$. Sabemos que el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza: $E = \frac{94,5 + 101,5}{2} = 3,5 = z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,5\sqrt{100}}{15} \cong 2,33$

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = p(Z < 2,33) = 0,9901 = \frac{1+n_c}{2}$. Despejando, el nivel de confianza es $n_c = 2 . 0,9901 - 1 = 0,9802 = 98,02\%$