Тема: Вектори у просторі. Додавання і віднімання векторів

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf

Матеріали до теми:



Властивості векторів

- *1. Для будь-яких векторів* $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$
- 1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D завжди



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

2) Правило паралелепіпеда

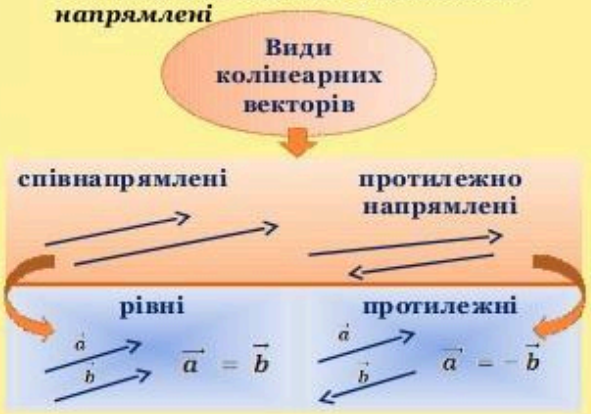
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC_1}$

3. Модулем (абсолютною величиною) вектора називається довжина відрізка, яким задається вектор. Якщо $\vec{a}(x;y;z)$ *, то*

- *Модуль будь-якого ненульового вектора є додатнє число:* $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- *Модуль нульового вектора дорівнює нулю:*

$\vec{0}=(0;0;0)$, $|\vec{0}|=0$

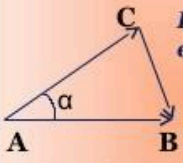
- *4. Два ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони співнапрямленні або протилежно напрямлені*



- *5. Ненульові вектори* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто* $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$

Застосування векторів

1. Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.



Кут між векторами

$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}=\alpha$

2. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими - 0°.

3. Скалярним добутком двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток дорівнює:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

4. Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ дорівнює:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

5. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90°, то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо cos 90°=0.

Умова перпендикулярності двох векторів:

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$$

Приклад розвязування вправ

1. Знайдіть координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо A(2;-3;-1), B(-4;-8;5), C(3;1;-2).

Розв'язання

$\overrightarrow{AB}$ (- 4 - 2; - 8 - (- 3);5 - (- 1)) = $\overrightarrow{AB}$ (- 6; - 5;6)\];

$\overrightarrow{AC}$ (3 - 2;1 - (- 3); - 2 - (- 1)) = $\overrightarrow{AC}$(1;4; - 1)\];

$\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{97}$;

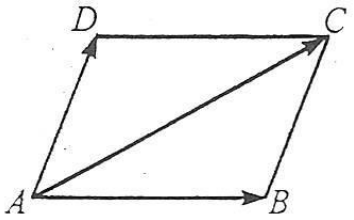
$\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(-6; -5; 6)$, $\overrightarrow{AC}(1; 4; -1), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{97}$\, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$.

2. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма ABCD, якщо A(2;-6;0), B(-4;8;2), D(0;-12;0)

Розв'язання

Оскільки $\overrightarrow{AB}(-6; 14; 2), \overrightarrow{AD}(-2; -6; 0)$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}(-8; 8; 2)$.



Тоді $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$.

Відповідь: $2\sqrt{33}$.

Додавання і віднімання векторів

Означення. **Додавання векторів (сума векторів)** $\bar{a} + \bar{b}$ - це операція знаходження вектора $\bar{c}$, всі елементи, якого дорівнюють попарній сумі відповідних елементів векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто кожен елемент вектора $\bar{c}$ дорівнює:

$$c_i = a_i + b_i$$

Означення. **Різниця векторів (віднімання векторів)** $\bar{a} - \bar{b}$ - це операція знаходження вектора $\bar{c}$, всі елементи, якого дорівнюють попарній різниці відповідних елементів векторів $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тобто кожен елемент вектора $\bar{c}$ дорівнює:

$$c_i = a_i - b_i$$

Формули додавання і віднімання векторів

Формули додавання і віднімання векторів для плоских задач

У випадку плоскої задачі суму та різницю векторів $\overline{a} = \{a_x\,;\, a_y\}$ і $\overline{b} = \{b_x\,;\, b_y\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y\}$$
$$\overline{a} - \overline{b} = \{a_x - b_x;\ a_y - b_y\}$$

Формули додавання і віднімання векторів для просторових задач

У випадку просторової задачі суму та різницю векторів $\overline{a} = \{a_x\,;\, a_y\,;\, a_z\}$ і $\overline{b} = \{b_x\,;\, b_y\,;\, b_z\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\}$$
$$\overline{a} - \overline{b} = \{a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z\}$$

Формули додавання і віднімання n-вимірних векторів

У випадку n-вимірного простору суму та різницю векторів $\overline{a} = \{a_1\,;\, a_2\,;\, \ldots\,;\, a_n\}$ і $\overline{b} = \{b_1\,;\, b_2\,;\, \ldots\,;\, b_n\}$ можна знайти скориставшись наступними формулами:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ \ldots\,;\ a_n + b_n\}$$
$$\overline{a} - \overline{b} = \{a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ \ldots\,;\ a_n - b_n\}$$

Приклади задач на додавання і віднімання векторів

Приклади плоских задач на додавання і віднімання векторів

Приклад 1. Знайти суму векторів $\overline{a} = \{1;\ 2\}$ і $\overline{b} = \{4;\ 8\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{1 + 4;\ 2 + 8\} = \{5;\ 10\}$$

Приклад 2. Знайти різницю векторів $\overline{a} = \{1;\ 2\}$ і $\overline{b} = \{4;\ 8\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} - \overline{b} = \{1 - 4;\ 2 - 8\} = \{-3;\ -6\}$$

Приклади просторових задач на додавання і віднімання векторів

Приклад 3. Знайти суму векторів $\overline{a} = \{1;\ 2;\ 5\}$ і $\overline{b} = \{4;\ 8;\ 1\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{1 + 4;\ 2 + 8;\ 5 + 1\} = \{5;\ 10;\ 6\}$$

Приклад 4. Знайти різницю векторів $\overline{a} = \{1;\ 2;\ 5\}$ і $\overline{b} = \{4;\ 8;\ 1\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} - \overline{b} = \{1 - 4;\ 2 - 8;\ 5 - 1\} = \{-3;\ -6;\ 4\}$$

Приклади задач на додавання і віднімання векторів з розмірністю більшою 3

Приклад 5. Знайти суму векторів $\overline{a} = \{1; 2; 5; 9\}$ і $\overline{b} = \{4; 8; 1; -20\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{1 + 4; 2 + 8; 5 + 1; 9 + (-20)\} = \{5; 10; 6; -11\}$$

Приклад 6. Знайти різницю векторів $\overline{a} = \{1; 2; 5; -1; 5\}$ і $\overline{b} = \{4; 8; 1; -1; 2\}$.

Розв'язок:

$$\overline{a} - \overline{b} = \{1 - 4; 2 - 8; 5 - 1; -1 - (-1); 5 - 2\} = \{-3; -6; 4; 0; 3\}$$

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §6, п.39-40.
2. Законспектувати означення, властивості, теореми.
3. Виконати усно: 39.1-39.3; письмово: 39.4, 39.7, 39.9, 39.11, 40.1, 40.3, 40.5.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://svitppt.com.ua/geometriya/vektori-u-prostori0.html

https://naurok.com.ua/prezentaciya-vektori-dodavannya-vidnimannya-vektoriv-mnozhennya-vektora-na-chislo-vlastivosti-diy-nad-vektorami-109877.html

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .