

Câu 1. [2D3-3.0-4] (GIỮA-HKII-2019-VIỆT-ĐỨC-HÀ-NỘI) Cho $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. Biết $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m = 2$.

B. $m = 20$.

C. $m = 5$.

D. $m = 10$.

Lời giải

Tác giả: Tiến Diệp; Fb: Tien Diep

Chọn B

Hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ nên ta có:

$$\int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } K = \int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx$$

$$\text{Đặt } -x = t \Rightarrow dx = -dt; f(-x) = f(t), \quad x = -2 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -2$$

$$\text{Do đó } \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_2^{-2} f(t) \cdot (-dt) = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow K = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(x) dx = 5 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Đặt } J = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}; \quad x = 2 \tan \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{Ta có: } dx = d(2 \tan \alpha) = \frac{2d\alpha}{\cos^2 \alpha} = 2(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}; \quad \text{Với } x = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó } J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 \alpha)}{4 \tan^2 \alpha + 4} d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{2} = \frac{1}{2} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3), ta có } K = J \Rightarrow 5 \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{20}$$

$$\text{Mà theo giả thiết, } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m} \quad \text{nên } \frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow m = 20.$$

Chú ý: Có thể tính nhanh $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$ bằng công thức: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$$\text{Từ đó: } \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}$$

huynhu1981@gmail.com