Sujet de physique (épreuve 2008), X- ENS Cachan.2008200820082008te \aaaa Fusionformat

Corrigé du problème. Option PSI

Partie I : Thermométrie par résistance.

I.1. Étude d'une thermistance.

1. L'argument d'une exponentielle ne peut qu'être un nombre sans dimension.
Donc B est homogène à une température.

$$B = \frac{\ln(R_2) - \ln(R_1)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}$$ Soit compte tenu de la figure 1 : $$B = \frac{\ln\left(8.10^6\right) - \ln(10)}{5.5.10^{-3} - 1.5.10^{-3}} \approx 3398\,K$$

On conserve : $B = 3400\,K$.

2. Le coefficient de température α s'écrit ici :

$$\alpha = \frac{1}{R_0}\exp\left[-B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right].\left(-\frac{B}{T^2}\right)R_0\exp\left[B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$. Soit : $\alpha = -\frac{B}{T^2}$.

A 25 °C (298 K) : $\alpha_{25°C} = -\frac{3400}{(298)^2}$ soit : $\alpha_{25°C} \approx -38.10^{-3}\,K^{-1}$.

3. Pour une résistance métallique, on a $\alpha \approx 5.10^{-3}\,K^{-1}$, soit environ 10 fois plus faible qu'avec une thermistance.

Une thermistance apparaît comme un capteur de température plus sensible qu'une résistance métallique.

4. Un DL de R(T) au voisinage de T_1 montre que la loi R(T) est affine, à des termes du troisième ordre près en $(T - T_1)$ si $\left.\frac{d^2R_{//}(T)}{dT^2}\right|_{T=T_1} = 0$.

5. La résistance équivalente s'écrit : $R_{//} = \frac{R_1 R_p}{R_1 + R_p}$.

Alors : $\frac{dR_{//}}{dT} = \frac{R_p^2\frac{dR}{dT}}{\left(R + R_p\right)^2}$. Et : $\frac{d^2R_{//}}{dT^2} = R_p^2\frac{\left(R + R_p\right)\frac{d^2R}{dT^2} - 2\left(\frac{dR}{dT}\right)^2}{\left(R + R_p\right)^3}$.

On aura donc $\left.\frac{d^2R_{//}(T)}{dT^2}\right|_{T=T_1} = 0$ si $\left(R + R_p\right)\frac{d^2R}{dT^2} = 2\left(\frac{dR}{dT}\right)^2$, soit : $R_p = \frac{2\left(\frac{dR}{dT}\right)^2}{\frac{d^2R}{dT^2}} - R(T)$.

Or : $\frac{dR}{dT} = -\frac{B.R(T)}{T^2}$ et $\frac{d^2R}{dT^2} = \frac{B.R(T)}{T^3}\left[2 + \frac{B}{T}\right]$.

En faisant R(T) = R1, il vient : $R_p = R_1\left(\frac{B-2T_1}{B+2T_1}\right)$.

Application numérique : Au voisinage de 298 K, on a B – 2T1 > 0 : ***<u>la linéarisation du capteur par résistance parallèle est donc possible</u>***.

6. Le coefficient de température de la thermistance linéarisée s'écrit : $\alpha_{thl} = \frac{1}{R_{//}}\frac{dR_{//}}{dT}$.

Soit, compte tenu des calculs précédents : $\alpha_{thl} = \alpha.\left(\frac{R_p}{R+R_p}\right)$.

On constate que $\alpha_{thl} < \alpha$. La linéarisation a diminué la sensibilité du capteur.

Avec l'expression de Rp déterminée à la question 5, on obtient : $\alpha_{thl} = \alpha_1.\left(\frac{B-2T_1}{2B}\right)$, avec $\alpha_1 = -\frac{B}{T_1^2}$. Ainsi : $\alpha_{thl} = -\left(\frac{B-2T_1}{2T_1^2}\right)$. Application numérique : $\alpha_{thl} = -15{,}8.10^{-3}\,K^{-1}$.

7. Pont diviseur de courant : $I = \frac{G}{G+G'}I_0$ et $I' = \frac{G'}{G+G'}I_0$.

8. Pont de Wheatstone classique avec RCD infinie.
umes = VC – VD = (VC – VM) - (VD – VM).

On a : $V_C - V_M = R_{thl}I$, avec $I = \frac{\frac{1}{R_1+R_{thl}}}{\frac{1}{R_1+R_{thl}}+\frac{1}{2R_1}}I_0 = \frac{2R_1}{3R_1+R_{thl}}I_0$

Et : $V_D - V_M = R_{thl}I'$, avec $I' = \frac{\frac{1}{2R_1}}{\frac{1}{R_1+R_{thl}}+\frac{1}{2R_1}}I_0 = \frac{R_1+R_{thl}}{3R_1+R_{thl}}I_0$.

Ainsi : $u_{mes} = \frac{R_1\left(R_{thl}-R_1\right)}{3R_1+R_{thl}}I_0$. En inversant cette relation, il vient : $R_{thl} = R_1\frac{\left(R_1I_0+3u_{mes}\right)}{R_1I_0-u_{mes}}$.

9. On a Rthl(T) = R1 + αthlR1(T – T1).

Ainsi : $u_{mes} = R_1I_0\frac{\alpha_{thl}R_1\left(T-T_1\right)}{4R_1+\alpha_{thl}R_1\left(T-T_1\right)}$. Soit avec un DL au premier ordre : $u_{mes} = \beta\left(T-T_1\right)$, avec $\beta = \frac{1}{4}R_1I_0\alpha_{thl}$.

Application numérique : $\beta \approx -0{,}02\,V.K^{-1}$.

10. Raisonnement simpliste : l'ensemble de l'enceinte (thermistance comprise) est à l'équilibre thermique à la température T1. Le pont est alors équilibré et umes = 0.

11. Avec u_{mes} = - 3 mV, on trouve : $R_{thl} \approx 4988\Omega$. D'où : $\delta\theta = \dfrac{R_{thl}/R_1 - 1}{\alpha_{thl}} \approx 0{,}15\,K$.

12. Conduction seule : $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, soit une durée caractéristique : $\tau_{conduction} \approx \dfrac{\rho c e^2}{\lambda}$

Convection seule : $\rho L^2 e c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -K_a \left(T - T_{amb}\right)$, soit une durée caractéristique : $\tau_{convection} \approx \dfrac{\rho c e L^2}{K_a}$.

Conduction négligée compte tenu si $\tau_{conduction} \ll \tau_{convection}$, soit $e \ll \dfrac{\lambda L^2}{K_a}$.

13. Le bilan thermique conduit à : $mc\dfrac{\partial T}{\partial t}dt = P_j dt - K_a(T - T_e)dt$.

(Le signe (-) vient du fait que le flux convectif a lieu dans le sens des T ↓ et que la thermistance s'échauffe sous l'effet de la puissance Joule consommée, donc que T > Te).

En posant $\delta\theta = T - T_e$, il vient : $mc\dfrac{d(\delta\theta)}{dt} + K_a\delta\theta = P_j$ (puisque ici, la température de la thermistance étant supposée uniforme, δθ n'est que fonction du temps).

14. Le temps de relaxation du système s'écrit : $\tau = \dfrac{mc}{K_a}$: ***<u>la durée du régime transitoire est typiquement de 4 à 5 fois τ</u>***.

Pour diminuer la durée du transitoire (et donc diminuer le temps de réponse du capteur), on peut chercher à ***<u>diminuer m</u>*** : d'où les recherches en miniaturisations des capteurs.

On peut aussi ***<u>augmenter K_a</u>*** en jouant sur la géométrie du capteur, ***<u>pour ↑ la surface utile</u>***, à masse donnée.

En régime stationnaire, on a : $K_a\delta\theta = P_j$.

15. La puissance Joule dissipée dans la thermistance est : $P_J = R_{thl}I^2$, avec $I = \dfrac{2R_1}{3R_1 + R_{thl}} I_0$.

D'où : $P_J = \dfrac{4R_1^2 R_{thl} I_0^2}{\left(3R_1 + R_{thl}\right)^2}$.

Du fait de l'auto échauffement de la thermistance, on a $R_{thl} \approx R_1$. D'où $P_J \approx \dfrac{1}{4}R_1 I_0^2$.

Application numérique : $P_J = 1{,}25\,mW$.

On en déduit le coefficient d'échange convectif : $K_a = \dfrac{P_J}{\delta\theta} \approx 8{,}3.10^{-3}\ W.K^{-1}$.

16. Le bilan énergétique s'écrit maintenant: $\phi_a dt + P_J dt - K_a \Delta T dt = mc\dfrac{\partial T}{\partial t}dt$

Qui conduit en régime stationnaire à : $\phi_a = K_a\Delta T - P_J$.

Mais, d'après la question 13., on peut écrire : $P_j = K_a \overline{\delta\theta}$.

On a donc : $\phi_a = K_a \left(\Delta T - \overline{\delta\theta} \right)$.

17. Cf m***ontage figure 4 : attention, si les points C et D sont les mêmes que ceux de la figure 3a, il faut permuter les résistances R1 et Rthl de la branche de gauche du montage figure 4, pour conserver l'expression de umes de la question 8 !***

Pour AO1, $V_{1+} = U_1$ et pour AO 2 : $V_{2+} = U_2$

Les AO étant idéaux et fonctionnant en régime linéaire, on a $V_{1+} = V_{1-}$ et $V_{2+} = V_{2-}$
De plus, c'est le même courant I qui traverse la branche {R_0, xR_0, R_0} allant de S_2 à S_1 :

On a : $V_{2-} - V_{1-} = xR_0 I = \dfrac{xR_0}{R_0 + xR_0 + R_0} \left(V_{S_2} - V_{S_1} \right)$. On en déduit : $V_{S_2} - V_{S_1} = \left(\dfrac{2+x}{x} \right) \left(U_2 - U_1 \right)$.

Pour AO3, idéal en régime linéaire, par le théorème de Millman :

$V_{3+} = \dfrac{\dfrac{V_{S_1}}{R_2} + \dfrac{U_0}{R_2}}{\dfrac{2}{R_2}} = \dfrac{V_{S_1} + U_0}{2}$ et $V_{3-} = \dfrac{\dfrac{V_{S_2}}{R_2} + \dfrac{u_S}{R_2}}{\dfrac{2}{R_2}} = \dfrac{V_{S_2} + u_S}{2}$. On en déduit : $u_S = V_{S_1} - V_{S_2} + U_0$.

18. Comme $u_{CD} = U_2 - U_1 = \beta \left[\dfrac{\phi_a}{K_a} + \overline{\delta\theta} \right]$, on a : $u_S = -\left(\dfrac{2+x}{x} \right) \dfrac{\beta}{K_a} \phi_a + U_0 - \left(\dfrac{2+x}{x} \right) \beta . \overline{\delta\theta}$.

Cette expression est de la forme cherchée ($u_S = G\varphi_a$) à condition de prendre :

$U_0 = \beta \left(\dfrac{2+x}{x} \right) \overline{\delta\theta}$ et $G = -\left(\dfrac{2+x}{x} \right) \dfrac{\beta}{K_a}$.

19. Application numérique : On veut G = 24 (V/W !), d'où $x \approx 0,22$ et $U_0 = -32\,mV$.

20. $M_\lambda^{CN}(T,x) = \dfrac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} \dfrac{x^5}{\exp(x) - 1}$.

A T fixée, Mλ admet un extremum pour x tel que : $\dfrac{d}{dx} \left(\dfrac{x^5}{\exp(x) - 1} \right) = 0$.

Soit $\dfrac{x^4 \left[(5x-1)\exp(x) - 5 \right]}{\left(\exp(x) - 1 \right)^2} = 0$, qui conduit à résoudre : $\exp(-x) = 1 - \dfrac{x}{5}$, avec x ≠ 0.

Résolution numérique (ou graphique ou avec un Dl, …) : $x_m = 4,965$

Il s'agit forcément d'un maximum (par Th. de Rolle, avec Mλ toujours > 0, nul en x = 0 et pour x →∞ et dérivable sur [0 ; +∞[.

21. On a $\lambda_m T = \dfrac{hc}{k_B x_m}$, soit numériquement : $C = 2900\,\mu m.K$.

22. 530 nm se situe dans le jaune – vert. Avec la question précédente, on calcule la température de surface du Soleil : $T_{\odot} = \frac{2900}{0.530} \approx 5500\,K$.

Les réactions nucléaires qui se produisent au cœur du soleil nécessitent des températures de l'ordre de quelques dizaines de millions de Kelvins, >> température de surface.

Le soleil ne peut donc pas être en équilibre thermique (T uniforme).

23. Pour un corps noir à 300 K : $\lambda_m = \frac{2900}{300}\mu m \approx 10\,\mu m$, située dans l'infrarouge moyen.

24. Si x >> 1, exp(x) >> 1, d'où : $M_{\lambda}^{CN}(T,x) \approx \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} x^5 \exp(-x)$.

25. CO_2 et H_2O sont des gaz à effet de serre. Les domaines spectraux correspondent aux maxima de rayonnement d'un corps noir autour de 280 – 310 K, températures typiques du système Terre – atmosphère.

26. H_2O et CO_2 sont des molécules polaires (moment dipolaire permanent pour H_2O et molécule très fortement polarisable pour CO_2 du fait de la différence d'électronégativité entre C et O), contrairement à N_2 ou O_2 (ne possédant pas de moment dipolaire permanent et restant faiblement polarisables). L'interaction avec le champ □est alors plus forte (énergie en □.□).

27. Pour $\lambda = 6\ \mu m$, on a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, soit ici : $\omega \approx 3{,}1.10^{14}\ rad/s$ (***et non pas ω0 comme écrit dans l'énoncé !***).

$\underline{n}^2 = n'^2 - n''^2 - 2jn'n''$.

D'où, en égalant les parties réelle et imaginaire : $\begin{cases} n'^2 - n''^2 = 1 + \dfrac{\chi_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \\ 2n'n'' = \dfrac{\dfrac{\omega}{\tau}\omega_0^2\chi_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \end{cases}$.

$\chi_0 << 1$ montre que la correction / vide est faible : on aura alors n'' << n'.

D'où : $n' \approx 1$ et $n'' = \frac{1}{2}\dfrac{\dfrac{\omega}{\tau}\omega_0^2\chi_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}}$.

28. Pour ω restant proche de ω_0, on peut écrire : $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = \left[(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)\right]^2 \approx 4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2$

.

Il vient alors : $n'' \approx \frac{1}{2}\dfrac{\dfrac{\omega_0}{\tau}\omega_0^2\chi_0}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \dfrac{\omega_0^2}{\tau^2}} \approx \dfrac{\omega_0\tau\chi_0}{2\left[1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2\right]}$;

Ce qui est bien la forme demandée en posant : $n''(\omega_0) = \frac{1}{2}\omega_0 \tau \chi_0$.

29. On a : $\underline{k} = n'\frac{\omega}{c} - jn''\frac{\omega}{c}$. D'où : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left(-n''\frac{\omega x}{c}\right)\exp\left[j\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_y$.

Pour une O.P.P.H., on a : $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega}\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}$. Soit :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}(n' - jn'')\exp\left(-n''\frac{\omega x}{c}\right)\exp\left[j\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_z$$

D'où les expressions réelles des champs : $\vec{E} = E_0 \exp\left(-n''\frac{\omega x}{c}\right)\cos\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_y$ et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\exp\left(-n''\frac{\omega x}{c}\right)\left\{n'\cos\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right] + n''\sin\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\right\}\vec{e}_z$$

30. Le vecteur de Poynting de l'onde s'écrit : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$, en utilisant les expressions réelles des champs (□n'est pas linéaire vis-à-vis du champ EM).

Ainsi : $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\exp\left(-2n''\frac{\omega x}{c}\right)\left\{n'\cos^2\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right] + n''\cos\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\sin\left[\omega\left(t - n'\frac{x}{c}\right)\right]\right\}\vec{e}_x$.

En remarquant que $\langle\cos^2(\omega t')\rangle = ½$ et que $\langle\cos(\omega t')\sin(\omega t')\rangle = 0$, il vient :

$$\Phi(x) = \left\|\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle_{temp}\right\| = \frac{E_0^2 n'}{2\mu_0 c}\exp\left(-2n''\frac{\omega x}{c}\right)$$.

Φ(x) représente la ***puissance électromagnétique surfacique moyenne*** rayonnée par l'onde.

31. On réécrit l'expression précédente sous la forme : $\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-\alpha x)$, avec :

$\Phi_0 = \frac{E_0^2 n'}{2\mu_0 c}$ et $\alpha = 2n''\frac{\omega}{c}$.

α est homogène à l'inverse d'une longueur. 1/α définit une épaisseur typique de pénétration de l'onde dans le milieu

En utilisant le résultat de la question 27, on peut écrire : $\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0).\omega}{c\left[1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2\right]}$.

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, on récrit α sous la forme : $\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0).\omega_0}{c}\frac{u}{\left[1 + 4\tau^2\omega_0^2(1-u)^2\right]}$.

32. On cherche ω ou u tel que : $\alpha(\omega) = \frac{\alpha(\omega_0)}{2}$ ou $\alpha(u) = \frac{\alpha(1)}{2}$.

Soit à résoudre : $\frac{u}{1 + 4\tau^2\omega_0^2(1-u)^2} = \frac{1}{2}$, avec l'hypothèse : $\omega_0\tau$ ▯ 1 .

On s'attend à une décroissance rapide de la fonction α(u) de part et d'autre de la valeur u = 1. Au lieu de résoudre en u, on chercher à résoudre avec la variable : $\xi = u - 1$.

On a l'équation : $2(\xi + 1) = 1 + (2\omega_0\tau)^2\xi^2$.

Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = 4 + 4 \times 4\omega_0^2\tau^2 \approx 16\omega_0^2\tau^2$.

On a donc deux racines réelles : $\xi_1 = \frac{+2 + 4\omega_0\tau}{2(2\omega_0\tau)^2} \approx \frac{1}{2\omega_0\tau}$ et $\xi_2 = \frac{+2 - 4\omega_0\tau}{2(2\omega_0\tau)^2} \approx \frac{-1}{2\omega_0\tau}$.

La largeur à mi-hauteur s'écrit ainsi : $\Delta\omega_{1/2} = \omega_0(\xi_1 - \xi_2)$ soit $\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}$.

Plus rapidement, on remarque que la grandeur pertinente du problème est l'écart ω0 - ω, la pulsation ω restant proche de ω0 : on peut alors utiliser l'expression approchée de $\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0)\omega_0}{c\left[1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2\right]}$. $\omega_{1/2}$ vérifie l'équation : $1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega_{1/2})^2 = 2$, conduisant à $\omega_{1/2} = \omega_0 \pm \frac{1}{2\tau}$, d'où $\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}$

33. Le pourcentage d'absorption en énergie dans la bande [5 µm ; 7 µm] est défini comme :

$$\% = 100\frac{\Phi_x(\omega_0)}{\Phi_x(\omega)} = 100\exp\left[-x\left(\alpha(\omega_0) - \alpha(\omega)\right)\right]$$

Quand, ω s'éloigne de la valeur ω0 l'absorption devient négligeable et α(ω) → 0.

On déduit de la courbe la valeur (en unité arbitraire) du facteur : $\exp\left[-\alpha(\omega_0).x\right] = 0,2$.

Pour les pulsations correspondant à la largeur à mi-hauteur de α(ω), on a : $\alpha(\omega) = \frac{\alpha(\omega_0)}{2}$, donnant ainsi un flux surfacique rayonné égal à : $\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(\omega_0).x\right] = \sqrt{0,2} \approx 0,45$.

On lit ainsi sur le graphe : $\Delta u \approx \frac{7}{10}0.05 \approx 0,035$. D'où $\tau = \frac{1}{\omega_0\Delta u} \approx 9,1.10^{-14}\,s$.

On a $\omega_0\tau \approx 28$: l'hypothèse $\omega_0\tau \gg 1$ est donc réalisée.

34. La formule du grandissement transversal appliqué à la lentille mince supposée être utilisée dans les conditions de Gauss donne : $\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \left(\frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA_0}}\right)^2 = \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2$.

35. Du fait de la définition même de $\varphi_{0\lambda}$ on a : $\phi_{0\lambda} = \int_{\Sigma}\int_{\theta=0}^{\alpha_0} \delta^2\phi_{0\lambda} = 2\pi L_{0\lambda}\Sigma\int_0^{\alpha_0}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$.

Soit encore : $\phi_{0\lambda} = \pi\Sigma L_{0\lambda}\sin^2(\alpha_0)$.

36. $\phi'_\lambda = \tau_E\phi_{0\lambda}$ compte tenu de la définition de τ_E.

Soit, compte tenu de la question 35 : $\phi'_\lambda = \tau_E \pi \Sigma' L_{0\lambda} \left(\frac{p_0}{p_i}\right)^2 \sin^2(\alpha_0)$.

Or $\sin(\alpha_0) = \frac{D}{2p_0}$, où D désigne le diamètre utile de la lentille, de surface utile : $\Sigma_\ell = \pi \frac{D^2}{4}$.

Il vient alors : $\phi'_\lambda = \tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} L_{0\lambda}$. Cette expression montre bien que φ'λ est proportionnelle à Lολ ($C^{ste} = \tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2}$), cette constante ne dépendant que des caractéristiques du pyromètre.

37. Résolution spatiale du pyromètre $R = \frac{p_0}{D_0}$. On a $\Sigma = \pi \frac{D_0^2}{4}$. D'où $\frac{p_0}{D_0} = \sqrt{\left(\frac{\pi p_0^2}{4\Sigma}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi p_i^2}{4\Sigma'}\right)}$

Application numérique : $R \approx 89$.

38. Par définition de l'exitance, on a : $M_\lambda = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta^2 \phi_\lambda}{dS} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi L_\lambda \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta$ (on intègre sur un demi espace, donc pour θ variant entre 0 et π/2).

Si Lλ = cste indépendante de λ, il vient : $M_\lambda = L_\lambda 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ soit : $M_\lambda = \pi . L_\lambda$.

39. Compte tenu des questions précédentes et de l'expression de l'exitance du corps noir, on a : $u_s = G\tau \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}$ dans l'approximation de Wien.

La surface utile de la lentille s'écrit : $\Sigma_\ell = \pi \frac{D^2}{4}$.

Application numérique : pour un corps noir à 700 + 273 K, on obtient : $u_s \approx 7{,}82V$.

$$u_s = G\tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} \frac{2\pi hc^2 . \varepsilon}{\lambda^5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}$$

40. Dans le cas où la cible est un corps d'émissivité ε, on a :

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B} \frac{1}{\ln\left[G\tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{u_s p_i^2} \frac{2\pi hc^2 . \varepsilon}{\lambda^5}\right]}$$

Qui donne :

1er cas : $\varepsilon_1 = 0{,}8$. On tire : $T_1 = 991{,}5K$ soit $\theta_1 \approx 718°C$

2ème cas : $\varepsilon_1 = 0,1$ .On tire : $T_1 = 1157\,K$ soit $\theta_2 \approx 884°C$.

41. La déviation du faisceau par un prisme de petit angle vaut : $D = (n-1).A$.

Comme n dépend de λ, la déviation aussi et les longueurs d'onde les plus courtes seront les plus déviées (soit ici la longueur d'onde λ1).

42. Le rapport des puissances absorbées s'écrit : $r = \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{M^{CN}_{\lambda_1}}{M^{CN}_{\lambda_2}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \exp\left[-\frac{hc}{k_B T}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right]$

Ce rapport, ne dépend que de la température de la cible scrutée (connaissant λ1 et λ2), et non de l'émissivité de la cible comme pour un pyromètre monochromatique.

43. On a deux longueurs d'onde voisines pour pouvoir considérer ε1(λ1) ≈ ε2(λ2).

Ces longueurs d'onde sont dans des fenêtres de transparence de l'atmosphère.

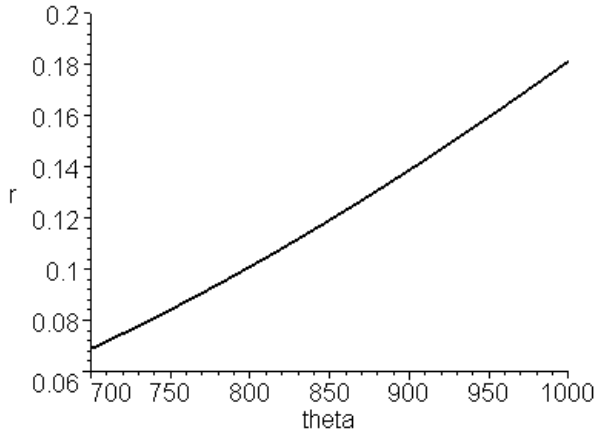
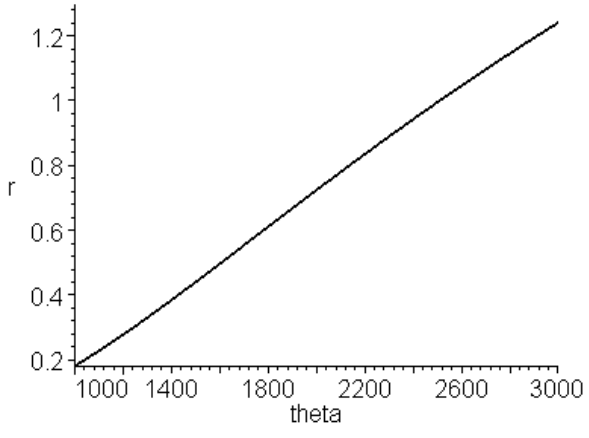
Pour les températures mesurables (1000 K < T < 3300 K), compte tenu des longueurs d'onde utilisées, on est bien dans l'approximation de Wien.

Le rapport $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, vaut au moins 12. On a bien exp(12) >> 1 !

Le verre ordinaire est considéré comme absorbant dans l'IR : utiliser des verres spéciaux.

44. Avec les valeurs numériques proposées, le rapport des puissances absorbées s'écrit :

$$r = 4,21.\exp\left(-\frac{4006,6}{\theta + 273}\right)$$.

Graphe pour θ ∈ |700 °C ; 1000 °C]	Graphe pour θ ∈ |1000 °C ; 3000 °C]
	

Avec ces deux gammes de mesures, la réponse de l'appareil présente une bonne linéarité avec la température : la conversion valeur mesurée → température affichée en est alors grandement facilitée.