

Partie I : Thermométrie par résistance.

I.1. Étude d'une thermistance.

1. L'argument d'une exponentielle ne peut qu'être un nombre sans dimension.
Donc B est homogène à une température.

$$B = \frac{\ln(R_2) - \ln(R_1)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \quad \text{Soit compte tenu de la figure 1 :} \quad B = \frac{\ln(8.10^6) - \ln(10)}{5.5.10^{-3} - 1.5.10^{-3}} \approx 3398 K$$

On conserve : $B = 3400 K$.

2. Le coefficient de température α s'écrit ici :

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \exp \left[-B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \cdot \left(-\frac{B}{T^2} \right) R_0 \exp \left[B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad \text{Soit :} \quad \alpha = -\frac{B}{T^2}$$

$$\text{A } 25^\circ C (298 K) : \quad \alpha_{25^\circ C} = -\frac{3400}{(298)^2} \quad \text{soit :} \quad \alpha_{25^\circ C} \approx -38.10^{-3} K^{-1}$$

3. Pour une résistance métallique, on a $\alpha \approx 5.10^{-3} K^{-1}$, soit environ 10 fois plus faible qu'avec une thermistance.

Une thermistance apparaît comme un capteur de température plus sensible qu'une résistance métallique.

4. Un DL de $R(T)$ au voisinage de T_1 montre que la loi $R(T)$ est affine, à des termes du

$$\left. \frac{d^2 R_{//}(T)}{dT^2} \right|_{T=T_1} = 0$$

troisième ordre près en $(T - T_1)$ si

$$R_{//} = \frac{R_1 R_p}{R_1 + R_p}$$

5. La résistance équivalente s'écrit :

$$\frac{dR_{//}}{dT} = \frac{R_p^2 \frac{dR}{dT}}{(R + R_p)^2} \quad \text{Et :} \quad \frac{d^2 R_{//}}{dT^2} = R_p^2 \frac{(R + R_p) \frac{d^2 R}{dT^2} - 2 \left(\frac{dR}{dT} \right)^2}{(R + R_p)^3}$$

Alors :

$$\left. \frac{d^2 R_{//}}{dT^2} \right|_{T=T_1} = 0 \quad \text{si} \quad (R + R_p) \frac{d^2 R}{dT^2} = 2 \left(\frac{dR}{dT} \right)^2 \quad \text{soit :} \quad R_p = \frac{2 \left(\frac{dR}{dT} \right)^2}{\frac{d^2 R}{dT^2}} - R(T)$$

On aura donc

$$\text{Or :} \quad \frac{dR}{dT} = -\frac{B \cdot R(T)}{T^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 R}{dT^2} = \frac{B \cdot R(T)}{T^3} \left[2 + \frac{B}{T} \right]$$

$$R_p = R_1 \left(\frac{B - 2T_1}{B + 2T_1} \right)$$

En faisant $R(T) = R_1$, il vient :

Application numérique : Au voisinage de 298 K, on a $B - 2T_1 > 0$: **la linéarisation du capteur par résistance parallèle est donc possible.**

6. Le coefficient de température de la thermistance linéarisée s'écrit : $\alpha_{thl} = \frac{1}{R_{//}} \frac{dR_{//}}{dT}$.

$$\alpha_{thl} = \alpha \cdot \left(\frac{R_p}{R + R_p} \right)$$

Soit, compte tenu des calculs précédents :

On constate que $\alpha_{thl} < \alpha$. La linéarisation a diminué la sensibilité du capteur.

$$\alpha_{thl} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{B - 2T_1}{2B} \right), \text{ avec}$$

$$\alpha_1 = -\frac{B}{T_1^2}. \text{ Ainsi : } \alpha_{thl} = -\left(\frac{B - 2T_1}{2T_1^2} \right). \text{ Application numérique : } \alpha_{thl} = -15,8 \cdot 10^{-3} K^{-1}.$$

7. Pont diviseur de courant : $I = \frac{G}{G + G'} I_0$ et $I' = \frac{G'}{G + G'} I_0$.

8. Pont de Wheatstone classique avec RCD infinie.

$$u_{mes} = V_C - V_D = (V_C - V_M) - (V_D - V_M).$$

$$\text{On a : } V_C - V_M = R_{thl} I, \text{ avec } I = \frac{\frac{1}{R_1 + R_{thl}}}{\frac{1}{R_1 + R_{thl}} + \frac{1}{2R_1}} I_0 = \frac{2R_1}{3R_1 + R_{thl}} I_0$$

$$\text{Et : } V_D - V_M = R_{thl} I', \text{ avec } I' = \frac{\frac{1}{2R_1}}{\frac{1}{R_1 + R_{thl}} + \frac{1}{2R_1}} I_0 = \frac{R_1 + R_{thl}}{3R_1 + R_{thl}} I_0$$

$$\text{Ainsi : } u_{mes} = \frac{R_1 (R_{thl} - R_1)}{3R_1 + R_{thl}} I_0. \text{ En inversant cette relation, il vient : } R_{thl} = R_1 \frac{(R_1 I_0 + 3u_{mes})}{R_1 I_0 - u_{mes}}.$$

9. On a $R_{thl}(T) = R_1 + \alpha_{thl} R_1 (T - T_1)$.

$$\text{Ainsi : } u_{mes} = R_1 I_0 \frac{\alpha_{thl} R_1 (T - T_1)}{4R_1 + \alpha_{thl} R_1 (T - T_1)}. \text{ Soit avec un DL au premier ordre :}$$

$$u_{mes} = \beta (T - T_1), \text{ avec } \beta = \frac{1}{4} R_1 I_0 \alpha_{thl}.$$

$$\text{Application numérique : } \beta \approx -0,02 V \cdot K^{-1}.$$

10. Raisonnement simpliste : l'ensemble de l'enceinte (thermistance comprise) est à l'équilibre thermique à la température T_1 . Le pont est alors équilibré et $u_{mes} = 0$.

11. Avec $u_{mes} = -3 \text{ mV}$, on trouve : $R_{thl} \approx 4988 \Omega$. D'où :
$$\delta\theta = \frac{R_{thl}/R_1 - 1}{\alpha_{thl}} \approx 0,15 \text{ K}$$

12. Conduction seule : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, soit une durée caractéristique : $\tau_{conduction} \approx \frac{\rho c e^2}{\lambda}$

Convection seule : $\rho L^2 e c \frac{\partial T}{\partial t} = -K_a (T - T_{amb})$, soit une durée caractéristique : $\tau_{convection} \approx \frac{\rho c e L^2}{K_a}$

Conduction négligée compte tenu si $\tau_{conduction} \ll \tau_{convection}$, soit $e \ll \frac{\lambda L^2}{K_a}$.

13. Le bilan thermique conduit à : $mc \frac{\partial T}{\partial t} dt = P_j dt - K_a (T - T_e) dt$.
(Le signe (-) vient du fait que le flux convectif a lieu dans le sens des $T \square$ et que la thermistance s'échauffe sous l'effet de la puissance Joule consommée, donc que $T > T_e$).

En posant $\delta\theta = T - T_e$, il vient : $mc \frac{d(\delta\theta)}{dt} + K_a \delta\theta = P_j$ (puisque ici, la température de la thermistance étant supposée uniforme, $\delta\theta$ n'est que fonction du temps).

14. Le temps de relaxation du système s'écrit : $\tau = \frac{mc}{K_a}$: **la durée du régime transitoire est typiquement de 4 à 5 fois τ**

Pour diminuer la durée du transitoire (et donc diminuer le temps de réponse du capteur), on peut chercher à **diminuer m** : d'où les recherches en miniaturisations des capteurs.

On peut aussi **augmenter K_a** en jouant sur la géométrie du capteur, **pour $\square$ la surface utile**, à masse donnée.

En régime stationnaire, on a : $K_a \delta\theta = P_j$.

15. La puissance Joule dissipée dans la thermistance est : $P_J = R_{thl} I^2$, avec $I = \frac{2R_1}{3R_1 + R_{thl}} I_0$.

D'où :
$$P_J = \frac{4R_1^2 R_{thl} I_0^2}{(3R_1 + R_{thl})^2}$$

Du fait de l'auto échauffement de la thermistance, on a $R_{thl} \approx R_1$. D'où $P_J \approx \frac{1}{4} R_1 I_0^2$.

Application numérique : $P_J = 1,25 \text{ mW}$.

On en déduit le coefficient d'échange convectif : $K_a = \frac{P_J}{\delta\theta} \approx 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$.

16. Le bilan énergétique s'écrit maintenant : $\phi_a dt + P_J dt - K_a \Delta T dt = mc \frac{\partial T}{\partial t} dt$

Qui conduit en régime stationnaire à : $\phi_a = K_a \Delta T - P_J$.

Mais, d'après la question 13., on peut écrire : $P_j = K_a \overline{\delta\theta}$.

On a donc : $\phi_a = K_a (\Delta T - \overline{\delta\theta})$.

17. Cf montage figure 4 : attention, si les points C et D sont les mêmes que ceux de la figure 3a, il faut permuter les résistances R_1 et R_{th} de la branche de gauche du montage figure 4, pour conserver l'expression de u_{mes} de la question 8 !

Pour AO1, $V_{1+} = U_1$ et pour AO 2 : $V_{2+} = U_2$

Les AO étant idéaux et fonctionnant en régime linéaire, on a $V_{1+} = V_{1-}$ et $V_{2+} = V_{2-}$.

De plus, c'est le même courant I qui traverse la branche $\{R_0, xR_0, R_0\}$ allant de S_2 à S_1 :

On a : $V_{2-} - V_{1-} = xR_0 I = \frac{xR_0}{R_0 + xR_0 + R_0} (V_{S_2} - V_{S_1})$. On en déduit : $V_{S_2} - V_{S_1} = \left(\frac{2+x}{x} \right) (U_2 - U_1)$.

Pour AO3, idéal en régime linéaire, par le théorème de Millman :

$$V_{3+} = \frac{\frac{V_{S_1} + U_0}{\frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}}}{\frac{R_2}{2}} = \frac{V_{S_1} + U_0}{2} \quad \text{et} \quad V_{3-} = \frac{\frac{V_{S_2} + u_s}{\frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}}}{\frac{R_2}{2}} = \frac{V_{S_2} + u_s}{2}.$$

On en déduit : $u_s = V_{S_1} - V_{S_2} + U_0$.

18. Comme $u_{CD} = U_2 - U_1 = \beta \left[\frac{\phi_a}{K_a} + \overline{\delta\theta} \right]$, on a : $u_s = - \left(\frac{2+x}{x} \right) \frac{\beta}{K_a} \phi_a + U_0 - \left(\frac{2+x}{x} \right) \beta \overline{\delta\theta}$.

Cette expression est de la forme cherchée ($u_s = G\phi_a$) à condition de prendre :

$$U_0 = \beta \left(\frac{2+x}{x} \right) \overline{\delta\theta} \quad \text{et} \quad G = - \left(\frac{2+x}{x} \right) \frac{\beta}{K_a}.$$

19. Application numérique : On veut $G = 24$ (V/W !), d'où $x \approx 0,22$ et $U_0 = -32$ mV.

20. $M_{\lambda}^{CN}(T, x) = \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{\exp(x) - 1}$.

A T fixée, M_{λ} admet un extremum pour x tel que : $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{\exp(x) - 1} \right) = 0$.

Soit $\frac{x^4 [(5x-1)\exp(x) - 5]}{(\exp(x) - 1)^2} = 0$, qui conduit à résoudre : $\exp(-x) = 1 - \frac{x}{5}$, avec $x \neq 0$.

Résolution numérique (ou graphique ou avec un DI, ...) : $x_m = 4,965$

Il s'agit forcément d'un maximum (par Th. de Rolle, avec M_{λ} toujours > 0 , nul en $x = 0$ et pour $x \rightarrow \infty$ et dérivable sur $[0 ; +\infty[$).

21. On a $\lambda_m T = \frac{hc}{k_B x_m}$, soit numériquement : $C = 2900 \mu m.K$.

22. 530 nm se situe dans le jaune – vert. Avec la question précédente, on calcule la température

$$T_{\text{S}} = \frac{2900}{0.530} \approx 5500 \text{ K}$$

de surface du Soleil :

Les réactions nucléaires qui se produisent au cœur du soleil nécessitent des températures de l'ordre de quelques dizaines de millions de Kelvins, >> température de surface.

Le soleil ne peut donc pas être en équilibre thermique (T uniforme).

23. Pour un corps noir à 300 K : $\lambda_m = \frac{2900}{300} \mu\text{m} \approx 10 \mu\text{m}$, située dans l'infrarouge moyen.

24. Si $x \gg 1$, $\exp(x) \gg 1$, d'où : $M_{\lambda}^{\text{CN}}(T, x) \approx \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} x^5 \exp(-x)$.

25. CO₂ et H₂O sont des gaz à effet de serre. Les domaines spectraux correspondent aux maxima de rayonnement d'un corps noir autour de 280 – 310 K, températures typiques du système Terre – atmosphère.

26. H₂O et CO₂ sont des molécules polaires (moment dipolaire permanent pour H₂O et molécule très fortement polarisable pour CO₂ du fait de la différence d'électronégativité entre C et O), contrairement à N₂ ou O₂ (ne possédant pas de moment dipolaire permanent et restant faiblement polarisables). L'interaction avec le champ $\square$ est alors plus forte (énergie en $\square \cdot \square$).

27. Pour $\lambda = 6 \mu\text{m}$, on a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, soit ici : $\omega \approx 3,1 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ (et non pas ω comme écrit dans l'énoncé !).

$$\underline{n}^2 = n'^2 - n''^2 - 2jn'n''$$

$$\begin{cases} n'^2 - n''^2 = 1 + \frac{\chi_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \\ 2n'n'' = \frac{\frac{\omega}{\tau} \omega_0^2 \chi_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \end{cases}$$

D'où, en égalant les parties réelle et imaginaire :

$\chi_0 \ll 1$ montre que la correction / vide est faible : on aura alors $n'' \ll n'$.

$$n'' = \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega}{\tau} \omega_0^2 \chi_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

D'où : $n' \approx 1$ et

28. Pour ω restant proche de ω_0 , on peut écrire : $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = [(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)]^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2$

$$n'' \approx \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega_0}{\tau} \omega_0^2 \chi_0}{4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\omega_0^2}{\tau^2}} \approx \frac{\omega_0 \tau \chi_0}{2 \left[1 + 4\tau^2 (\omega_0 - \omega)^2 \right]}$$

Il vient alors :

Ce qui est bien la forme demandée en posant : $n''(\omega_0) = \frac{1}{2} \omega_0 \tau \chi_0$.

29. On a : $\frac{k}{c} = n' \frac{\omega}{c} - j n'' \frac{\omega}{c}$. D'où : $\underline{\underline{E}} = E_0 \exp\left(-n'' \frac{\omega x}{c}\right) \exp\left[j\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \underline{\underline{e}}_y$.

Pour une O.P.P.H., on a : $\underline{\underline{B}} = \frac{k}{\omega} \underline{\underline{e}}_x \wedge \underline{\underline{E}}$. Soit :

$$\underline{\underline{B}} = \frac{E_0}{c} (n' - j n'') \exp\left(-n'' \frac{\omega x}{c}\right) \exp\left[j\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \underline{\underline{e}}_z$$

$$\underline{\underline{E}} = E_0 \exp\left(-n'' \frac{\omega x}{c}\right) \cos\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \underline{\underline{e}}_y \text{ et}$$

D'où les expressions réelles des champs :

$$\underline{\underline{B}} = \frac{E_0}{c} \exp\left(-n'' \frac{\omega x}{c}\right) \left\{ n' \cos\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] + n'' \sin\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \right\} \underline{\underline{e}}_z$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\underline{E}} \wedge \underline{\underline{B}}$$

30. Le vecteur de Poynting de l'onde s'écrit : $\underline{\underline{\Pi}}$, en utilisant les expressions réelles des champs ($\underline{\underline{\Pi}}$ n'est pas linéaire vis-à-vis du champ EM).

Ainsi : $\underline{\underline{\Pi}} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \exp\left(-2n'' \frac{\omega x}{c}\right) \left\{ n' \cos^2\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] + n'' \cos\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \sin\left[\omega\left(t - n' \frac{x}{c}\right)\right] \right\} \underline{\underline{e}}_x$.

En remarquant que $\langle \cos^2(\omega t') \rangle = \frac{1}{2}$ et que $\langle \cos(\omega t') \sin(\omega t') \rangle = 0$, il vient :

$$\Phi(x) = \left\| \left\langle \underline{\underline{\Pi}} \right\rangle_{temp} \right\| = \frac{E_0^2 n'}{2 \mu_0 c} \exp\left(-2n'' \frac{\omega x}{c}\right)$$

$\Phi(x)$ représente la **puissance électromagnétique surfacique moyenne** rayonnée par l'onde.

31. On réécrit l'expression précédente sous la forme : $\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-\alpha x)$, avec :

$$\Phi_0 = \frac{E_0^2 n'}{2 \mu_0 c} \quad \text{et} \quad \alpha = 2n'' \frac{\omega}{c}$$

α est homogène à l'inverse d'une longueur. $1/\alpha$ définit une épaisseur typique de pénétration de l'onde dans le milieu

$$\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0) \cdot \omega}{c \left[1 + 4\tau^2 (\omega_0 - \omega)^2 \right]}$$

En utilisant le résultat de la question 27, on peut écrire :

$$\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0) \cdot \omega_0}{c} \frac{u}{\left[1 + 4\tau^2 \omega_0^2 (1-u)^2 \right]}$$

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, on récrit α sous la forme :

32. On cherche ω ou u tel que : $\alpha(\omega) = \frac{\alpha(\omega_0)}{2}$ ou $\alpha(u) = \frac{\alpha(1)}{2}$.

Soit à résoudre : $\frac{u}{1 + 4\tau^2 \omega_0^2 (1-u)^2} = \frac{1}{2}$, avec l'hypothèse : $\omega_0 \tau \ll 1$.

On s'attend à une décroissance rapide de la fonction $\alpha(u)$ de part et d'autre de la valeur $u = 1$. Au lieu de résoudre en u , on cherche à résoudre avec la variable : $\xi = u - 1$.

On a l'équation : $2(\xi + 1) = 1 + (2\omega_0\tau)^2 \xi^2$.

Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = 4 + 4 \times 4\omega_0^2\tau^2 \approx 16\omega_0^2\tau^2$.

On a donc deux racines réelles : $\xi_1 = \frac{+2 + 4\omega_0\tau}{2(2\omega_0\tau)^2} \approx \frac{1}{2\omega_0\tau}$ et $\xi_2 = \frac{+2 - 4\omega_0\tau}{2(2\omega_0\tau)^2} \approx \frac{-1}{2\omega_0\tau}$.

La largeur à mi-hauteur s'écrit ainsi : $\Delta\omega_{1/2} = \omega_0(\xi_1 - \xi_2)$ soit $\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}$.

Plus rapidement, on remarque que la grandeur pertinente du problème est l'écart $\omega_0 - \omega$, la pulsation ω restant proche de ω_0 : on peut alors utiliser l'expression approchée de

$$\alpha \approx \frac{2n''(\omega_0)\omega_0}{c \left[1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 \right]}. \quad \omega_{1/2} \text{ vérifie l'équation : } 1 + 4\tau^2(\omega_0 - \omega_{1/2})^2 = 2, \text{ conduisant à}$$

$$\omega_{1/2} = \omega_0 \pm \frac{1}{2\tau}, \text{ d'où } \Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}$$

33. Le pourcentage d'absorption en énergie dans la bande $[5 \mu\text{m} ; 7 \mu\text{m}]$ est défini comme :

$$\% = 100 \frac{\Phi_x(\omega_0)}{\Phi_x(\omega)} = 100 \exp[-x(\alpha(\omega_0) - \alpha(\omega))]$$

Quand, ω s'éloigne de la valeur ω_0 l'absorption devient négligeable et $\alpha(\omega) \rightarrow 0$.

On déduit de la courbe la valeur (en unité arbitraire) du facteur : $\exp[-\alpha(\omega_0).x] = 0,2$.

Pour les pulsations correspondant à la largeur à mi-hauteur de $\alpha(\omega)$, on a : $\alpha(\omega) = \frac{\alpha(\omega_0)}{2}$,

donnant ainsi un flux surfacique rayonné égal à : $\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(\omega_0).x\right] = \sqrt{0,2} \approx 0,45$.

On lit ainsi sur le graphe : $\Delta u \approx \frac{7}{10} 0,05 \approx 0,035$. D'où $\tau = \frac{1}{\omega_0 \Delta u} \approx 9,1 \cdot 10^{-14} \text{ s}$.

On a $\omega_0\tau \approx 28$: l'hypothèse $\omega_0\tau \gg 1$ est donc réalisée.

34. La formule du grandissement transversal appliqué à la lentille mince supposée être utilisée

$$\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \left(\frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA_0}} \right)^2 = \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^2$$

dans les conditions de Gauss donne :

35. Du fait de la définition même de $\phi_{0\lambda}$ on a : $\phi_{0\lambda} = \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha_0} \delta^2 \phi_{0\lambda} = 2\pi L_{0\lambda} \Sigma \int_0^{\alpha_0} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$.

Soit encore : $\phi_{0\lambda} = \pi \Sigma L_{0\lambda} \sin^2(\alpha_0)$.

36. $\phi'_\lambda = \tau_E \phi_{0\lambda}$ compte tenu de la définition de τ_E .

$$\phi'_\lambda = \tau_E \pi \Sigma' L_{0\lambda} \left(\frac{p_0}{p_i} \right)^2 \sin^2(\alpha_0)$$

Soit, compte tenu de la question 35 :

Or $\sin(\alpha_0) = \frac{D}{2p_0}$, où D désigne le diamètre utile de la lentille, de surface utile : $\Sigma_\ell = \pi \frac{D^2}{4}$.

Il vient alors : $\phi'_\lambda = \tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} L_{0\lambda}$. Cette expression montre bien que ϕ'_λ est proportionnelle à $L_{0\lambda}$ (

$C^{ste} = \tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2}$), cette constante ne dépendant que des caractéristiques du pyromètre.

37. Résolution spatiale du pyromètre $R = \frac{p_0}{D_0}$. On a $\Sigma = \pi \frac{D_0^2}{4}$. D'où

$$\frac{p_0}{D_0} = \sqrt{\left(\frac{\pi p_0^2}{4\Sigma} \right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi p_i^2}{4\Sigma'} \right)}$$

Application numérique : $R \approx 89$.

38. Par définition de l'existance, on a :

$$M_\lambda = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta^2 \phi_\lambda}{dS} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi L_\lambda \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

(on intègre sur un demi espace, donc pour θ variant entre 0 et $\pi/2$).

Si $L_\lambda = \text{cste}$ indépendante de λ , il vient :

$$M_\lambda = L_\lambda 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ soit : } M_\lambda = \pi \cdot L_\lambda.$$

39. Compte tenu des questions précédentes et de l'expression de l'existance du corps noir, on a :

$$u_s = G\tau \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}$$

dans l'approximation de Wien.

La surface utile de la lentille s'écrit : $\Sigma_\ell = \pi \frac{D^2}{4}$.

Application numérique : pour un corps noir à $700 + 273$ K, on obtient : $u_s \approx 7,82V$.

$$u_s = G\tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{p_i^2} \frac{2\pi hc^2 \cdot \varepsilon}{\lambda^5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}$$

40. Dans le cas où la cible est un corps d'émissivité ε , on a :

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B} \frac{1}{\ln \left[G\tau_E \frac{\Sigma' \Sigma_\ell}{u_s p_i^2} \frac{2\pi hc^2 \cdot \varepsilon}{\lambda^5} \right]}$$

Qui donne :

1^{er} cas : $\varepsilon_1 = 0,8$. On tire : $T_1 = 991,5 K$ soit $\theta_1 \approx 718^\circ C$

2^{ème} cas : $\varepsilon_1 = 0,1$. On tire : $T_1 = 1157 K$ soit $\theta_2 \approx 884^\circ C$.

41. La déviation du faisceau par un prisme de petit angle vaut : $D = (n - 1).A$.

Comme n dépend de λ , la déviation aussi et les longueurs d'onde les plus courtes seront les plus déviées (soit ici la longueur d'onde λ_1).

$$r = \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{M_{\lambda_1}^{CN}}{M_{\lambda_2}^{CN}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 \exp \left[-\frac{hc}{k_B T} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right]$$

42. Le rapport des puissances absorbées s'écrit :

Ce rapport, ne dépend que de la température de la cible scrutée (connaissant λ_1 et λ_2), et non de l'émissivité de la cible comme pour un pyromètre monochromatique.

43. On a deux longueurs d'onde voisines pour pouvoir considérer $\varepsilon_1(\lambda_1) \approx \varepsilon_2(\lambda_2)$.

Ces longueurs d'onde sont dans des fenêtres de transparence de l'atmosphère.

Pour les températures mesurables ($1000 K < T < 3300 K$), compte tenu des longueurs d'onde utilisées, on est bien dans l'approximation de Wien.

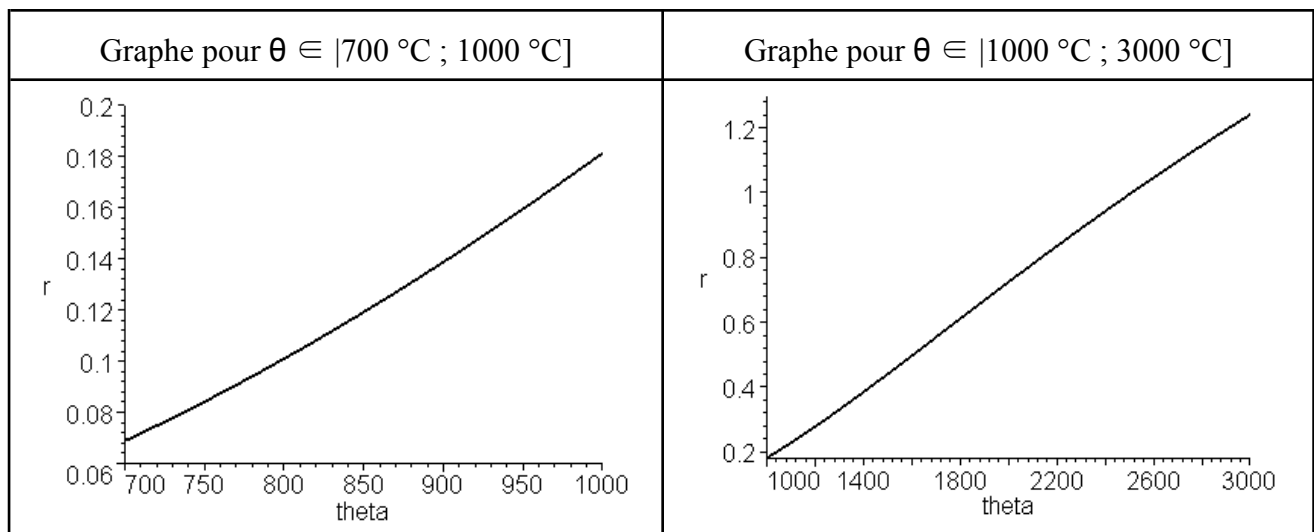
$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Le rapport $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, vaut au moins 12. On a bien $\exp(12) \gg 1$!

Le verre ordinaire est considéré comme absorbant dans l'IR : utiliser des verres spéciaux.

44. Avec les valeurs numériques proposées, le rapport des puissances absorbées s'écrit :

$$r = 4,21 \cdot \exp \left(-\frac{4006,6}{\theta + 273} \right)$$



Avec ces deux gammes de mesures, la réponse de l'appareil présente une bonne linéarité avec la température : la conversion valeur mesurée $\rightarrow$ température affichée en est alors grandement facilitée.