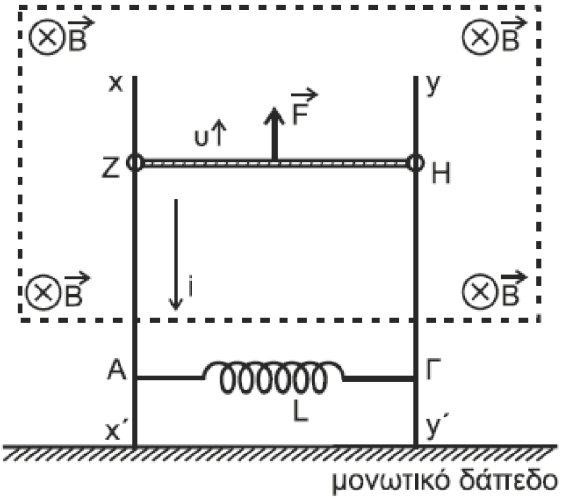
Το ερώτημα: Μπορεί να εφαρμοστεί ο νόμος του Neumann στο ερώτημα Γ1 για τον υπολογισμό του φορτίου που διακινείται σε ορισμένο χρονικό διάστημα;



Υπενθυμίζω (δεδομένα και όσες απαντήσεις μας χρειάζονται).

- Το σχήμα είναι το διπλανό με δεδομένα:
- Το πηνίο ιδανικό με L=0,5H
- Η ράβδος ΖΗ με μήκος ℓ=1m, μάζα m=0,5Kg και ωμική αντίσταση R=1Ω
- Το μαγνητικό πεδίο ομογενές με μέτρο B=1T
- Η ένταση ρεύματος i=2t (SI)

1. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος **και το φορτίο που διέρχεται από μία διατομή του κυκλώματος στο χρονικό διάστημα από t=0s έως t=2s.**

$$i = 2t \quad \text{εμβαδόν} \quad \frac{di}{dt} = 2 \quad A/s, \quad q = \sum_0^{2s} i\,dt = \quad = \frac{1}{2} \cdot \quad = \quad C$$

2. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο.

$$E_L = -L\frac{di}{dt} = -0{,}5 \cdot 2 = -1\ V \rightarrow |E_L| = 1\ V \quad V_L = -E_L = \quad V$$

3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου ΖΗ σε συνάρτηση με τον χρόνο υ-t.

$$E_{\varepsilon\pi} + E_L = iR \rightarrow \upsilon B\ell + E_L = iR \rightarrow \upsilon = \frac{iR - E_L}{B\ell} = \frac{2t+1}{1} \rightarrow$$

$$\upsilon = \text{κίνηση} \quad (\text{SI}) \quad \text{με} \quad 1 \quad / \quad , \quad \upsilon_0 = \quad m/s \quad a = \frac{d\upsilon}{dt} = \quad m \quad s$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t = t^2 + t \rightarrow y(2) = 6\ m$$

Η κίνηση του αγωγού είναι κατακόρυφη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα.

1.Με εμβαδομέτρηση (ή ολοκλήρωση) βρίσκουμε για το διακινούμενο φορτίο μέχρι την t

$$q(t) = \text{εμβαδόν} = \frac{1}{2}t2t = t^2 \rightarrow q(2) = 4\ C$$

2.Με το νόμο Neumann βρίσκουμε:

$$q(t)=\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{B\ell y}{R}=\frac{B\ell\left(t^2+t\right)}{R}..=t^2+t=y(t)\rightarrow q(2)=6\ C$$

Παρατηρούμε διαφορετική τιμή στους δύο υπολογισμούς.

Που βρίσκεται το λάθος;

Ας θυμηθούμε ότι ο νόμος βγήκε βάσει της έντασης του ρεύματος που διαμορφώνεται μόνο από την επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη.

- σελ. 174 σχολ. βιβλίου ΓΠ Β τάξης με απ' ευθείας εφαρμογή του νόμου του Faraday

$$q=I\Delta t=\frac{\mathsf{E}}{R}\Delta t=\frac{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}{R}\Delta t=\frac{\Delta\Phi}{R}\ \text{ή}$$

$$q(t)=\sum_{t_1}^{t_2}(I\Delta t)=\sum_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathsf{E}(t)}{R}\Delta t\right]=\sum_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}}{R}\Delta t\right]=\frac{1}{R}\sum_{t_1}^{t_2}\Delta\Phi=\frac{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)}{R}=\frac{\Delta\Phi_{12}}{R}$$

με διατύπωση

«το q που μετατοπίζεται σε **ορισμένη μεταβολή της μαγνητικής ροής** είναι ανεξάρτητο από το χρόνο που διαρκεί η μεταβολή», δηλ. ανεξάρτητο της χρονικής διάρκειας της μεταβολής αν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Νε άλλα λόγια δεν έχει σημασία ο τρόπος που μεταβάλλεται η μαγνητική ροή, ανάμεσα στις δύο χρονικές στιγμές, αλλά μόνο το μέγεθος της μεταβολής της. Προφανώς το φορτίο εξαρτάται από τη χρονική διάρκεια αφού το ίδιο συμβαίνει και με τη μαγνητική ροή.

- και σελ. 187 παράδειγμα 5.1 σχολ. βιβλίου Κατεύθυνσης Β τάξης σε πλαίσιο που εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο με απόδειξη όπως η παραπάνω και προφανώς αναφέρεται σε συγκεκριμένη μεταβολή της μαγνητικής ροής (μέχρι το πλαίσιο να βρεθεί εξ ολοκλήρου εντός του μαγνητικό πεδίο) με διατύπωση

«το συνολικό φορτίο που μετακινείται είναι ανεξάρτητο της χρονικής διάρκειας του φαινομένου» που προφανώς είναι λάθος διατύπωση αν γενικευτεί και δεν περιοριστεί στο μελετώμενο φαινόμενο. Πάντως το συμπέρασμα δεν το αποκαλεί νόμο.

Εδώ όμως συμμετοχή στη διαμόρφωση του ρεύματος έχει και η αυτεπαγωγή. Έτσι έχουμε:

$$q(t)=\sum_0^t i(t)\Delta t=\sum_0^t \frac{\mathsf{E}(t)+\mathsf{E}_L(t)}{R}\Delta t=\sum_0^t \frac{\mathsf{E}(t)}{R}\Delta t+\sum_0^t \frac{\mathsf{E}_L(t)}{R}\Delta t=\ldots=\frac{\Delta\Phi_{o\lambda}(t)}{R}+\mathsf{E}_L(t)t=$$

$$=\frac{B\ell y(t)}{R}+\mathsf{E}_L(t)t\rightarrow q(t)=y(t)+(-1)t=\left(t^2+t\right)-t=t^2$$

$$\boxed{q(t)=t^2\rightarrow q(2)=4\ C=6-2}$$

Έτσι στην περίπτωση που εκτός της επαγωγικής ηλεκτρεγερτικής δύναμης εμπλέκεται και άλλη ηλεκτρεγερτική δύναμη στο κύκλωμα το διακινηθέν φορτίο για μια ορισμένη χρονική διάρκεια δεν εξαρτάται μόνο από τη συγκεκριμένη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Στη συγκεκριμένη άσκηση η αυτεπαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη αντιπαρατίθεται (το ρεύμα βαίνει αυξανόμενο με σταθερό ρυθμό που δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη) στην εξ επαγωγής αναπτυσσόμενη στην κινούμενη ράβδο. Ο νόμος θα είχε εφαρμογή αν αντί για πηνίο είχαμε ωμική αντίσταση (με αλλαγή του παρανομαστή).

Εν τέλει ας είμαστε λίγο προσεκτικοί κατά την εφαρμογή του νόμου (όρια ισχύος του). Και προφανώς δεν αποτελεί νόμο καθολικής ισχύος (έχει προϋποθέσεις).

Σημείωση: Ο υπολογισμός του φορτίου που διακινήθηκε για κάποιο χρονικό διάστημα μπορεί να γίνει αρκεί να σκεφτούμε ότι η αποθηκευόμενη στο πηνίο ενέργεια σχετίζεται άμεσα με το φορτίο που διήλθε. Έτσι έχουμε:

$$U=\frac{1}{2}Li^2\rightarrow\frac{dU}{dt}=Li\frac{di}{dt}=|\mathsf{E}_L|i=|\mathsf{E}_L|\frac{dq}{dt}\rightarrow dU=|\mathsf{E}_L|dq\rightarrow U=\int_0^t|\mathsf{E}_L|dq$$

$$\text{αν }|\mathsf{E}_L|=\text{σταθ.}\rightarrow U=|\mathsf{E}_L|q\rightarrow q=\frac{U}{|\mathsf{E}_L|}=\frac{4}{1}=4\ C$$

Βέβαια υπολογισμός καθίσταται εύκολος, γιατί η αυτεπαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι σταθερή (σταθερός ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος). Το φορτίο, στη συγκεκριμένη περίπτωση, κατευθύνεται από το συν (+) του πηνίου προς το μείον (-), δηλ. χάνει ενέργεια η οποία αποδίδεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου. Θυμίζει τον ορισμό της ηλεκτρεγερτικής δύναμης πηγής που η E ισούται με το παραγόμενο έργο από την πηγή ανά μονάδα διερχομένου φορτίου (με φορά κίνησης αντίθετη από αυτή που δύναται να προκαλέσει από μόνη της σε ένα κύκλωμα) που όμως θεωρείται σταθερή $\mathsf{E}=\frac{W}{q}\rightarrow W=q\mathsf{E}$. Στην εξεταζόμενη περίπτωση (φορά αυξανόμενου ρεύματος) το πηνίο – πηγή «φορτίζεται».

Κλείνοντας επισημαίνεται ότι ο τέτοιος υπολογισμός του φορτίου αφορά μια ειδική περίπτωση και δεν πρέπει αυθαιρέτως να γενικεύεται. Δε μπορεί να αποτελέσει κανόνα ή νόμο.

Παρατήρηση (μια μικρή βελτίωση): Σχετικά με την αποταμιευόμενη ενέργεια στο πηνίο και το διακινηθέν φορτίο γι' αυτή τη διαδικασία. Βρίσκουμε:

$$U=\frac{1}{2}Li^2 \rightarrow \frac{dU}{dt}=Li\frac{di}{dt}=-\mathcal{E}_L i=-\mathcal{E}_L\frac{dq}{dt} \rightarrow dU=-\mathcal{E}_L dq \rightarrow \frac{dU}{dq}=-\mathcal{E}_L \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{με } di>0 \rightarrow \mathcal{E}_L<0 \rightarrow \dfrac{dU}{dq}>0 \ \left(\text{ενέργεια προστίθεται, } dq>0\right)\\ \text{με } di<0 \rightarrow \mathcal{E}_L>0 \rightarrow \dfrac{dU}{dq}<0 \ \left(\text{ενέργεια αφαιρείται, } dq>0\right)\end{array}\right) \rightarrow \frac{dU}{\mathcal{E}_L}<0$$

$$dq=-\frac{dU}{\mathcal{E}_L} \rightarrow \Delta q=-\int_0^t \frac{dU}{\mathcal{E}_L} \left(\text{αν } \ di \ \text{δεν είναι σταθ.} \ \ \rightarrow \mathcal{E}_L \ \text{δεν είναι σταθ.} \neq 0\right) \rightarrow \Delta q=-\frac{U(t)-U(0)}{\mathcal{E}_L}=-\frac{\Delta U}{\mathcal{E}_L}\geq 0$$

Έτσι στον υπολογισμό του διακινηθέντος φορτίου, αν τη χρονική στιγμή μηδέν, που αρχίζει η μεταβολή του ρεύματος, το ρεύμα δεν ήταν μηδέν, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι υπήρχε και «αρχική» ενέργεια που δεν σχετίζεται με αυτή τη μεταβολή, δηλ. η σχέση $\Delta q=-\frac{\Delta U}{\mathcal{E}_L}$ (για $\mathcal{E}_L=$ σταθ.) έχει εφαρμογή και στην περίπτωση που η αρχική ταχύτητα, συνεπώς και το αρχικό ρεύμα, δεν ήταν μηδενικά.