

Тема: Підсумковий урок

Посилання на підручник:
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Завдання:

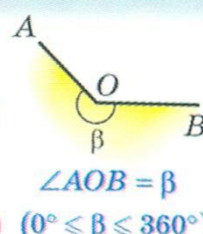
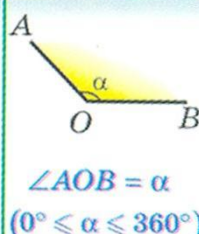
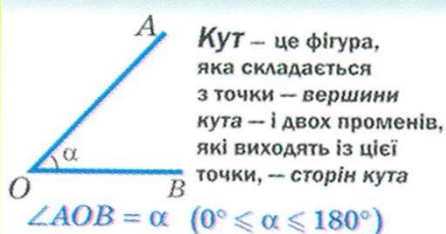
1. Повторення курсу геометрії за таблицями на наступних сторінках.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

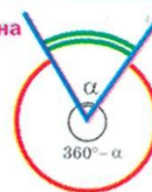
Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .

КУТИ

ПОНЯТТЯ КУТА



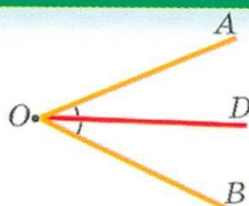
Кут — частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком



ВИДИ КУТІВ

ПРЯМИЙ	ГОСТРИЙ	ТУПИЙ	РОЗГОРНУТИЙ	БІЛЬШИЙ ЗА РОЗГОРНУТИЙ
$\angle ABC = 90^\circ$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \beta < 180^\circ$	Сторони розгорнутого кута — доповняльні промені $\angle AOB = 180^\circ$	$180^\circ < \gamma \leq 360^\circ$

БІСЕКТРИСА КУТА



Бісектриса кута — це промінь, який виходить із вершини кута, лежить у його внутрішній області й ділить кут на два рівні кути

Промінь OD — бісектриса кута AOB

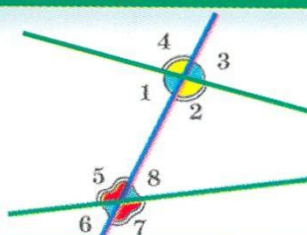
$$\angle AOD = \angle BOD$$

СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

(розглядаються кути, менші за розгорнутий кут)

СУМІЖНІ КУТИ	ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ
$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ Сума суміжних кутів дорівнює 180°	$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні $\angle 1 = \angle 3$ $\angle 2 = \angle 4$ Вертикальні кути рівні

КУТИ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ



$\angle 1$ і $\angle 5$
 $\angle 2$ і $\angle 8$ — внутрішні односторонні

$\angle 1$ і $\angle 8$
 $\angle 2$ і $\angle 5$ — внутрішні різносторонні

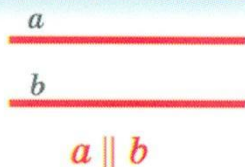
$\angle 4$ і $\angle 5$
 $\angle 3$ і $\angle 8$ — відповідні

$\angle 1$ і $\angle 6$
 $\angle 2$ і $\angle 7$ — відповідні

ПАРАЛЕЛЬНІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

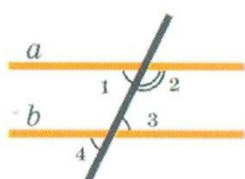
Таблиця 2

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ



Дві прямі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині й не перетинаються

Через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній

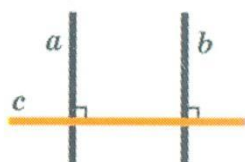


ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

Якщо $\angle 1 = \angle 3$ (внутрішні різносторонні кути рівні),
або $\angle 1 = \angle 4$ (відповідні кути рівні),
або $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°)
то $a \parallel b$

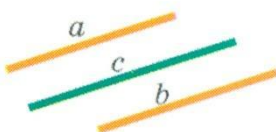
ВЛАСТИВОСТІ

Якщо $a \parallel b$,
то $\angle 1 = \angle 3$,
 $\angle 1 = \angle 4$,
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$



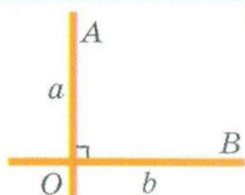
Якщо $a \perp c$, $b \perp c$,
то $a \parallel b$

Якщо $a \parallel b$, $c \perp a$,
то $c \perp b$



Якщо $a \parallel b$, $b \parallel c$,
то $a \parallel c$

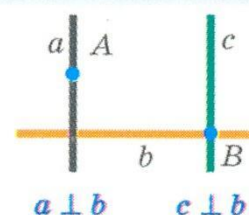
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ



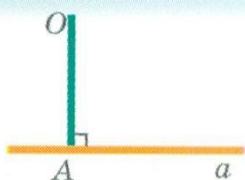
Дві прямі називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом

$$a \perp b \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

Через задану точку можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної



ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДО ПРЯМОЇ



$$OA \perp a (A \in a)$$

OA — перпендикуляр до a

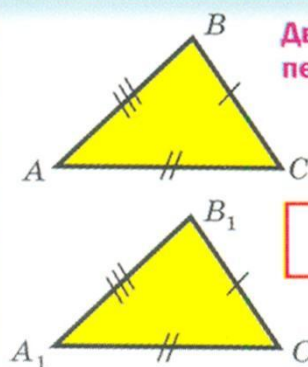
A — основа перпендикуляра

$OA \perp a (A \in a)$, OA — відстань від точки O до прямої a

Перпендикуляр — найкоротша відстань від заданої точки до точок заданої прямої

ТРИКУТНИКИ

РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

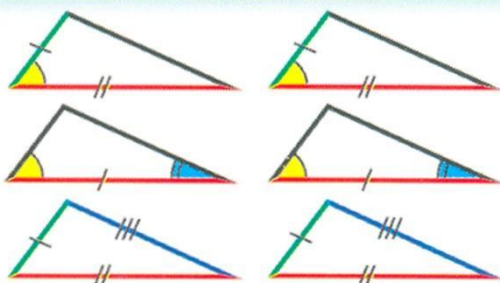


Дві фігури називаються рівними, якщо вони рухом переводяться одна в одну

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

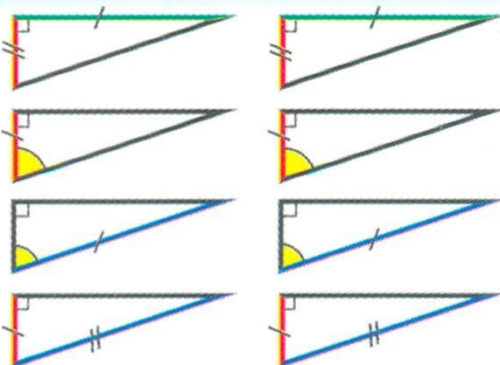


1. За двома сторонами і кутом між ними

2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами

3. За трьома сторонами

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



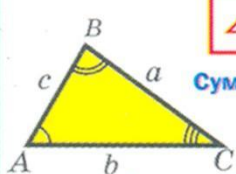
1. За двома катетами

2. За катетом і гострим кутом

3. За гіпотенузою і гострим кутом

4. За гіпотенузою і катетом

ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН ТА КУТІВ ТРИКУТНИКА

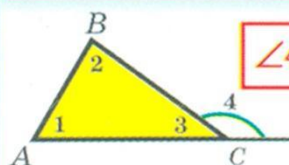


$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сума кутів трикутника дорівнює 180°

$$|b - c| < a < b + c \text{ — нерівність трикутника}$$

ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

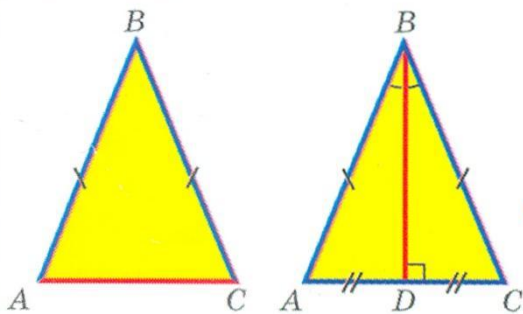


$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

$$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$$

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Таблиця 4



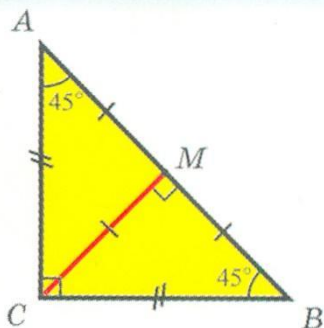
Трикутник називається рівнобедреним, якщо у нього дві сторони рівні

$\triangle ABC$ – рівнобедрений ($AB = BC$)

AC – основа, AB і BC – бічні сторони

ВЛАСТИВОСТІ	ОЗНАКИ
1. Якщо в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (кути при основі рівні) 2. Якщо $\triangle ABC$ – рівнобедрений і BD – медіана, то BD – висота й бісектриса У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються	1. Якщо в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ 2. Якщо в трикутнику збігаються: а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, то трикутник рівнобедрений

РІВНОБЕДРЕНИЙ ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК



$$\angle C = 90^\circ, AC = CB$$

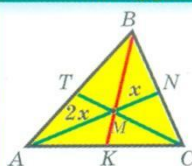
$$\angle A = \angle B = 45^\circ$$

$$CM \perp AB, \text{ тоді } CM = AM = MB$$

$$AC = CB = a, \text{ тоді } AB = a\sqrt{2}$$

ВИСОТА, МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА ТА СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

МЕДІАНА ТРИКУТНИКА



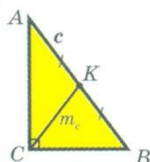
BK — медіана, K — середина AC

M — точка перетину медіан,

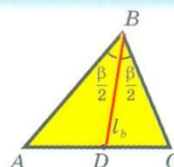
$$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$m_c = \frac{1}{2}c$ — у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи



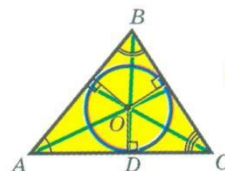
БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА



BD — бісектриса трикутника,

$$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle B$$

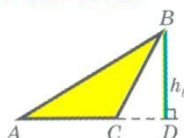
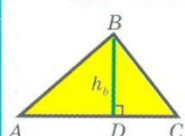
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$



O — точка перетину бісектрис трикутника, центр вписаного кола

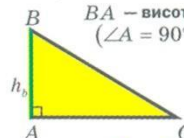
ВИСОТА ТРИКУТНИКА

BD — висота, $BD \perp AC$



Для прямокутного трикутника:

BA — висота ($\angle A = 90^\circ$)

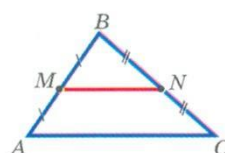


Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (ортоцентр)

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА



MN — середня лінія,

M — середина AB ,

N — середина BC

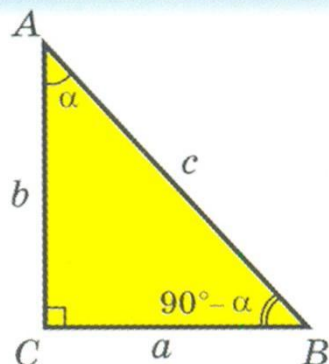
$$1. MN \parallel AC$$

$$2. MN = \frac{1}{2} AC$$

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ В ТРИКУТНИКУ

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК



Теорема Піфагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

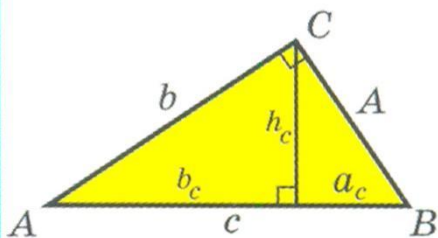
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$



$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC$$

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC$$

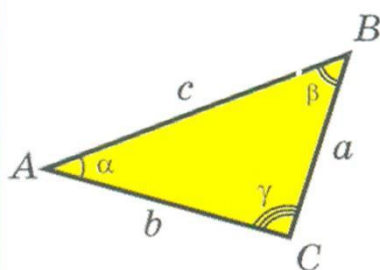
$$\triangle ACD \sim \triangle CBD$$

a, b — катети; c — гіпотенуза

ДОВІЛЬНИЙ ТРИКУТНИК

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

a, b, c — сторони трикутника; R — радіус описаного кола

НАСЛІДКИ

1. Якщо у трикутнику $c^2 = a^2 + b^2$, то $\gamma = 90^\circ$, тобто цей трикутник є прямокутним (теорема, обернена до теореми Піфагора)
2. Якщо у трикутнику $c^2 = a^2 + b^2$, то кут γ — гострий ($\cos \gamma > 0$); якщо c — найбільша сторона, то трикутник є гострокутним
3. Якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то кут γ — тупий ($\cos \gamma < 0$)
4. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

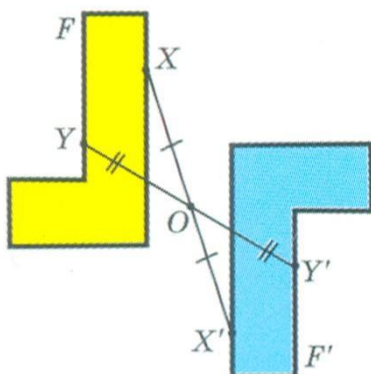
ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР РУХИ

Таблиця 7

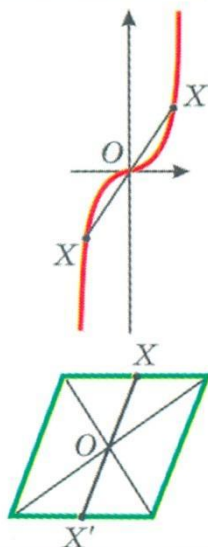
1. Рух — це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури
2. Під час руху зберігаються кути між променями
3. Дві фігури називаються рівними, якщо вони рухом переводяться одна в одну

$$X'Y' = XY$$

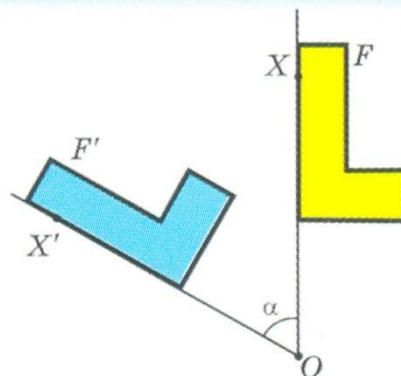
СИМЕТРИЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ



$$OX' = OX$$



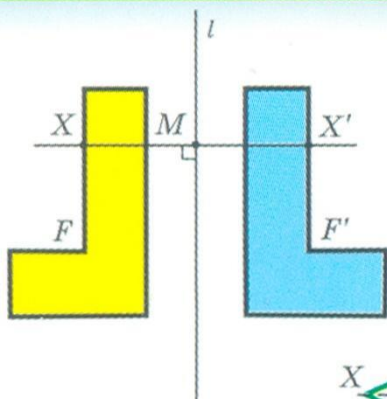
ПОВОРОТ



$$OX' = OX$$

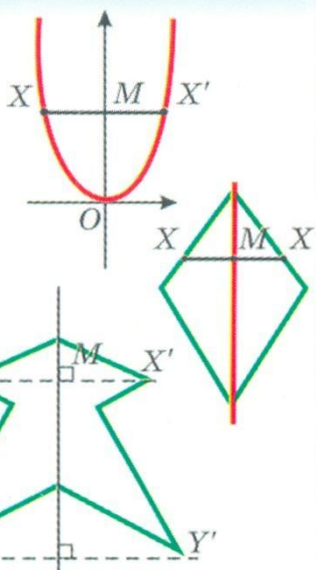
$$\angle XO X' = \alpha$$

СИМЕТРИЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

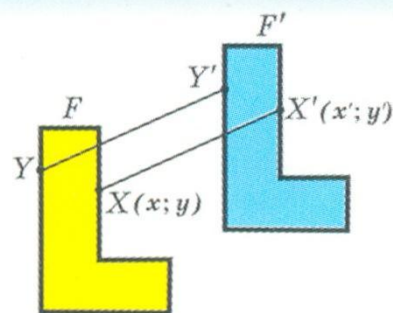


$$XX' \perp l$$

$$XM = MX'$$



ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ



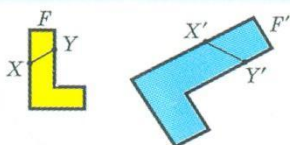
Точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань

$$X(x; y) \rightarrow X'(x'; y')$$

$$x' = x + a; \quad y' = y + b$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

ОЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ

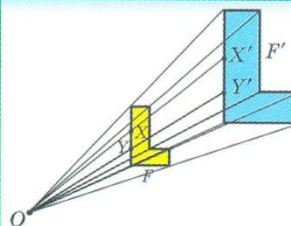


$$\frac{X'Y'}{XY} = k - \text{коефіцієнт подібності}$$

Перетворення подібності — це, перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

1. Перетворення подібності зберігає кути між променями
2. У подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні

ГОМОТЕТИЯ



Якщо точка X відображується в точку X' , то це означає:

- 1) Точка X' лежить на промені OX ;

$$2) \frac{OX'}{OX} = k$$

$$X'Y' \parallel XY$$

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

ОЗНАЧЕННЯ	ВЛАСТИВОСТІ	ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{h_1}{h} = \frac{R_1}{R} = k$ $\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$ $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = k^2$	1. За двома рівними кутами Якщо $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 2. За двома пропорційними сторонами і кутом між ними Якщо $\angle A = \angle A_1; \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 3. За трьома пропорційними сторонами Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 4. Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному Якщо $PQ \parallel AC$ то $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$

Два трикутники називаються подібними, якщо вони переводяться один в один перетворенням подібності

ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВИДИ

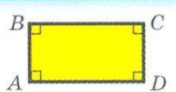


Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називається паралелограмом

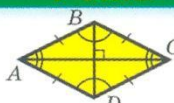
$$ABDC - \text{паралелограм} \Leftrightarrow AB \parallel CD, BC \parallel AD$$

ВЛАСТИВОСТІ	ОЗНАКИ
1. Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $AB = DC; AD = BC;$ $\angle A = \angle C; \angle B = \angle D$ У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні 2. Якщо $ABCD$ — паралелограм, і BD — діагональ, то $\triangle ABD = \triangle CDB$ Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники 3. Якщо $ABCD$ — паралелограм, AC і BD — діагональ, то $AO = OC; BO = OD$ Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам 4. $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB \parallel CD; BC \parallel AD$, то $ABCD$ — паралелограм Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм 2. Якщо $ABCD$ — чотирикутник, і $AB = DC; AD = BC$, то $ABCD$ — паралелограм Якщо в чотирикутнику протилежні сторони парами рівні, то цей чотирикутник — паралелограм 3. Якщо $ABCD$ — чотирикутник, і $AO = OC; BO = OD$, то $ABCD$ — паралелограм Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться пополам, то цей чотирикутник — паралелограм

ПРЯМОКУТНИК



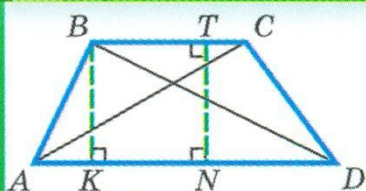
РОМБ



КВАДРАТ



ТРАПЕЦІЯ

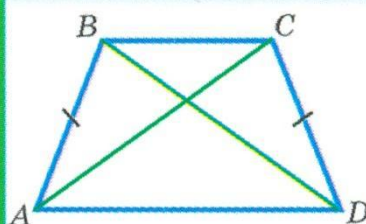


$$BC \parallel AD$$

Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони непаралельні, називається трапецією

$ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$ – основи, AB і CD – бічні сторони, AC і BD – діагоналі, BK і TN – висоти

ОКРЕМІ ВИДИ ТРАПЕЦІЇ



Рівнобічна трапеція – трапеція з рівними бічними сторонами ($AB = CD$)

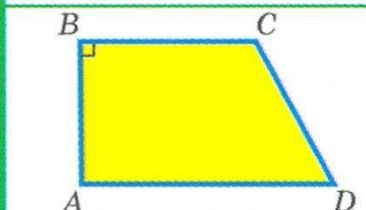
ВЛАСТИВОСТІ

$$\angle A = \angle D$$

Кути при основі рівні (також $\angle B = \angle C$)

$$AC = BD$$

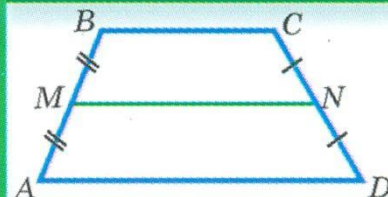
Діагоналі рівні



Прямокутна трапеція – це трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна до основ

$$h_{\text{прямокутн. трапеції}} = AB$$

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ



Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції

MN – середня лінія

ВЛАСТИВОСТІ

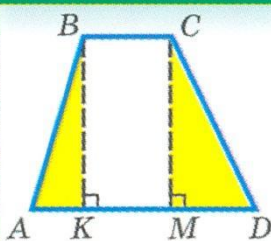
$$\begin{aligned} MN &\parallel AD \\ MN &\parallel BC \end{aligned}$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

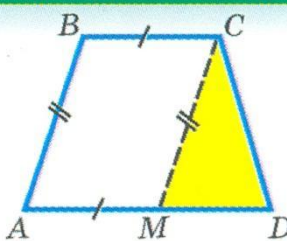
Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі

ТИПОВІ ДОДАТКОВІ ПОБУДОВИ ДЛЯ ТРАПЕЦІЇ

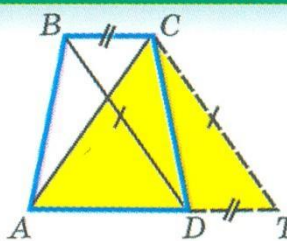
(зображені штриховими лініями)



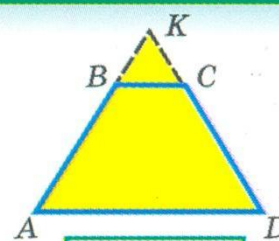
$$\begin{aligned} BK &\perp AD \\ CM &\perp AD \end{aligned}$$



$$CM \parallel BA$$

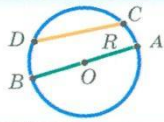


$$CT \parallel BD$$



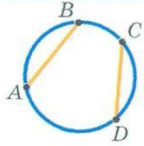
$$\begin{aligned} AB &\parallel AD \\ &\text{продовжити} \\ &\text{до перетину} \end{aligned}$$

КОЛО, ХОРДИ, ДУГИ, ДОТИЧНІ Й СІЧНІ

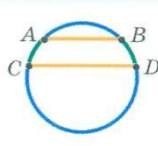


КОЛО — це фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра)
 O — центр кола; OA — радіус; AB — діаметр; CD — хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола)
Найбільшою хордою є діаметр

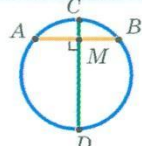
ВЛАСТИВОСТІ ДУГ І ХОРД



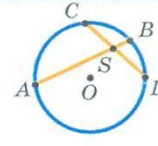
$\cup AB = \cup CD \Leftrightarrow AB = CD$
 Рівні дуги стягують рівні хорди (і навпаки)



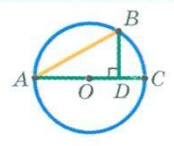
$AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$
 Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги



$CD \perp AB \Leftrightarrow AM = MB$
 $\cup AC = \cup CB$
 $\cup AD = \cup DB$



$SA \cdot SB = SC \cdot SD$

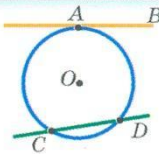


Якщо AB — хорда, AC — діаметр і $BD \perp AC$, то

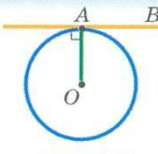
$$AB^2 = AC \cdot AD$$

$$BD^2 = AD \cdot DC$$

ВЛАСТИВОСТІ ДОТИЧНИХ І СІЧНИХ

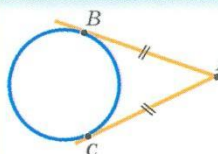


CD — січна — пряма, що має з колом дві спільні точки



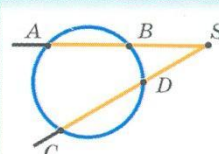
$OA \perp AB$

AB — дотична — пряма, що має з колом лише одну спільну точку
 A — точка дотику



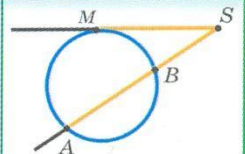
$AB = AC$

AB і AC — дотичні



$SA \cdot SB = SC \cdot SD$

SA і SC — січні

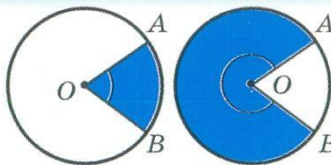


$SA \cdot SB = SM^2$

SM — дотична, M — точка дотику, SA — січна

КУТИ У КОЛІ

ЦЕНТРАЛЬНИЙ КУТ

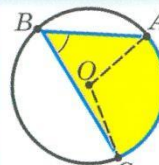


$\angle AOB$ — центральний кут
 (вершина центрального кута збігається із центром кола)

$$\angle AOB = \cup AB$$

Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається

ВПИСАНИЙ КУТ



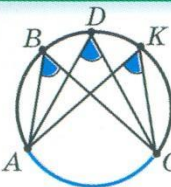
$\angle ABC$ — вписаний кут

(вершина вписаного кута лежить на колі, а сторони перетинають коло)

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

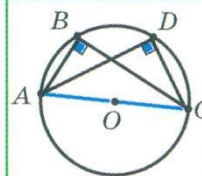
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу

ВЛАСТИВОСТІ ВПИСАНИХ КУТІВ



$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$$

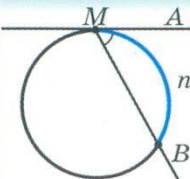
Вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні



$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

Вписаний кут, який спирається на діаметр, дорівнює 90°

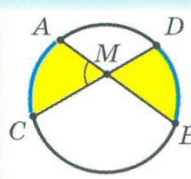
КУТ МІЖ ДОТИЧНОЮ І СІЧНОЮ



MA — дотична, MB — січна

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$

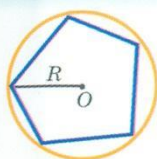
ВПИСАНИЙ КУТ



Хорди AB і CD перетинаються в точці M

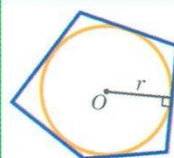
$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)$$

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ



Вписаний многокутник
(усі вершини лежать на колі)

Коло описане навколо многокутника

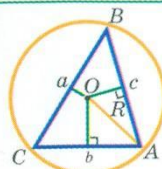


Описаний многокутник
(усі сторони є дотичними до кола)

Коло вписане в многокутник

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА І ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Описане коло

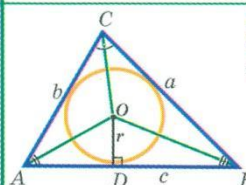


Центр O — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника

$$OA = OB = OC = R$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} \quad R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$$

Вписане коло



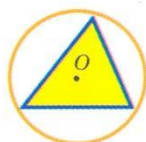
Центр O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника;

$$OD = r; OD \perp AB$$

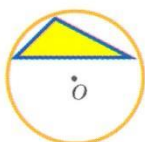
$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА ОПИСАНОГО КОЛА

Гострокутний трикутник

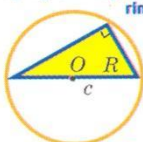


Тупокутний трикутник



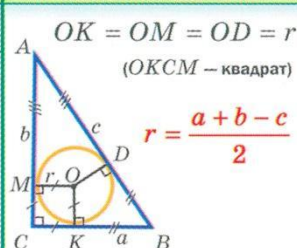
Прямокутний трикутник

Центр O — середина гіпотенузи



$$R = \frac{c}{2}$$

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

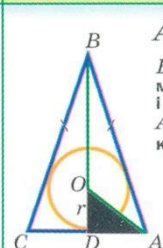


$$OK = OM = OD = r$$

(OKCM — квадрат)

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

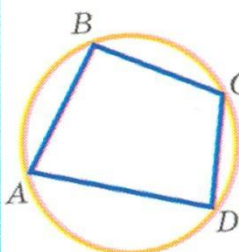


$AB = BC$
 BD — висота, медіана і бісектриса;
 AO — бісектриса кута A

$$OD = r$$

ВПИСАНИЙ ТА ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИКИ

У вписаного чотирикутника

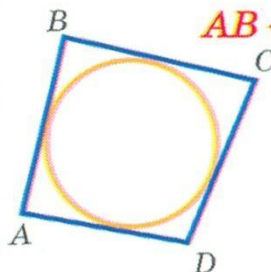


$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

І навпаки: якщо у чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло

В описаному чотирикутнику



$$AB + CD = BC + AD$$

(суми довжин протилежних сторін рівні)

І навпаки: якщо в опуклого чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло

ПРЯМОКУТНИК

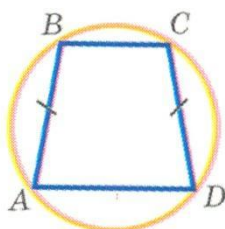


$$R = \frac{1}{2}d$$

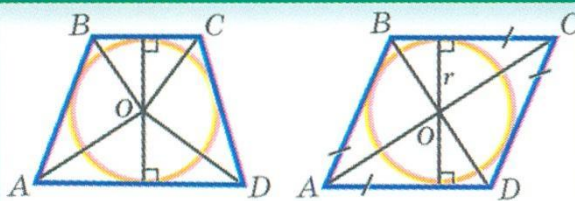
1. Якщо паралелограм вписано в коло, то він є прямокутником

2. Центр кола, описаного навколо прямокутника, — точка перетину діагоналей

ТРАПЕЦІЯ І РОМБ



Якщо $ABCD$ —
вписана трапеція,
то $AB = CD$

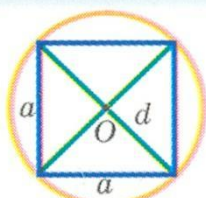


$$d_{\text{вписан. кола}} = h$$

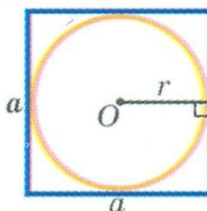
O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів

$$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$$

КРАДРАТ



$$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

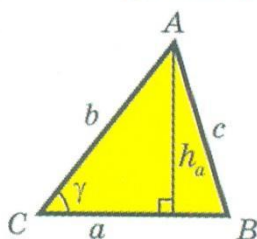


$$r = \frac{1}{2}a$$

ПЛОЩІ ТРИКУТНИКІВ І ЧОТИРИКУТНИКІВ

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Довільний трикутник



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

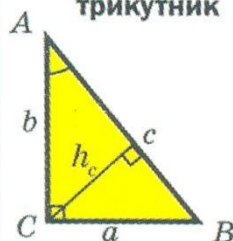
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} -$$

формула Герона $\left(p = \frac{a+b+c}{2} \right)$

$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ де } R - \text{ радіус описаного кола}$$

$$S = r \cdot p, \text{ де } r - \text{ радіус вписаного кола}$$

Прямокутний трикутник

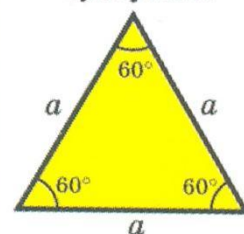


$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

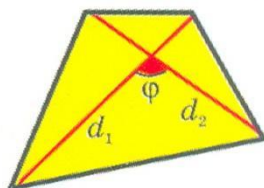
Правильний трикутник



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

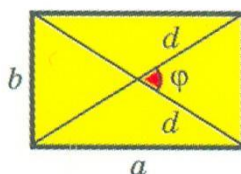
ПЛОЩА ЧОТИРИКУТНИКА

Довільний чотирикутник



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

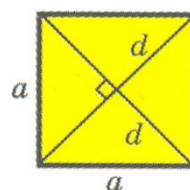
Прямокутник



$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

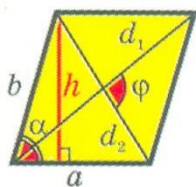
Квадрат



$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2} d^2$$

Паралелограм

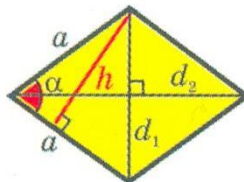


$$S = a \cdot h$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Ромб

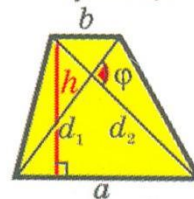


$$S = a \cdot h$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Трапеція



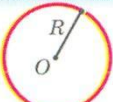
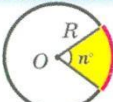
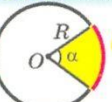
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = m \cdot h$$

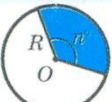
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

ДОВЖИНА КОЛА ТА ПЛОЩА КРУГА

ДОВЖИНА КОЛА ТА ЙОГО ЧАСТИН

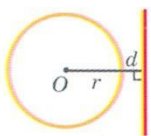
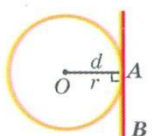
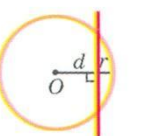
 $C = 2\pi R$ — довжина кола	 $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi R n}{180}$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в n градусів	 $l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R \cdot \alpha$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в α радіан
--	--	--

ПЛОЩА КРУГА І ЙОГО ЧАСТИНИ

КРУГ	СЕКТОР	СЕГМЕНТ
 $S = \pi R^2$	 $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ Площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в n градусів	 $S_{\text{кругового сегмента}} = S_{\text{кругового сектора}} \mp S_{\Delta AOB}$ (при $\alpha < 180^\circ$ знак «-», при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

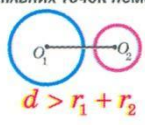
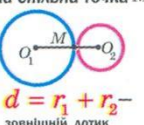
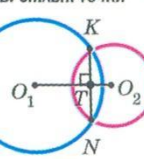
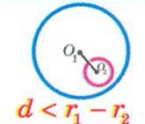
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І КОЛА

(d — відстань від центра кола до прямої, r — радіус кола)

Спільних точок немає  $d > r$	Одна спільна точка  $d = r$ пряма AB — дотична	Дві спільні точки  $d < r$ пряма AB перетинає коло
---	---	---

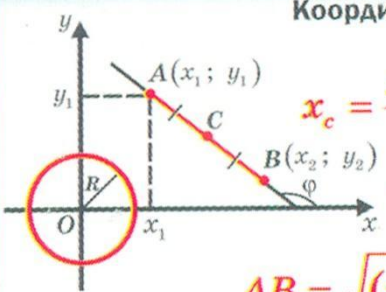
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ

($O_1O_2 = d$ — відстань між центрами кіл, r_1, r_2 — радіуси кіл; $r_1 > r_2$)

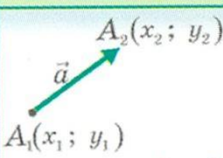
Спільних точок немає  $d > r_1 + r_2$	Одна спільна точка M  $d = r_1 + r_2$ — зовнішній дотик	Дві спільні точки  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ $KN \perp O_1O_2$ $KT = TN$
 $d < r_1 - r_2$	 $d = r_1 - r_2$ — внутрішній дотик	

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

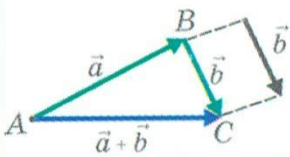
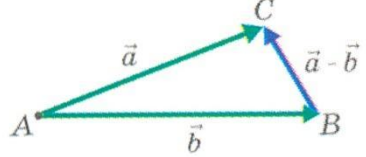
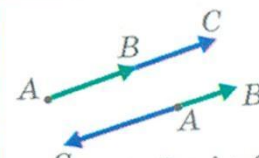
ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ

ФОРМУЛИ	РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ
 Координати середини відрізка C — середина AB $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$ Відстань між точками $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$ax + by + c = 0$ $y = kx + b$ $k = \operatorname{tg} \varphi$ — кутовий коефіцієнт Рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ Центр кола — початок координат R — радіус

ВЕКТОРИ

РІВНІ ВЕКТОРИ	КООРДИНАТИ ВЕКТОРА
 Напрявлений відрізок будемо називати вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ $\vec{a} = AB$ — модуль вектора $\vec{a}$	 $\vec{a}(a_1; a_2)$, де $a_1 = x_2 - x_1$ $a_2 = y_2 - y_1$ $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

СУМА ВЕКТОРІВ	РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ
$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ Правило трикутника	$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО	СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ
$\lambda(a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2)$  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ $ \lambda \vec{a} = \lambda \vec{a} $ При $\lambda > 0$ вектори $\lambda \vec{a}$ і $\vec{a}$ однаково напрямлені При $\lambda < 0$ вектори $\lambda \vec{a}$ і $\vec{a}$ протилежно напрямлені	 $a \cdot b = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi$ В координатах: $\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

ПРЯМІ			ПРЯМА І ПЛОЩИНА			ПЛОЩИНИ		
Перетинаються	Паралельні	Мимобіжні	Пряма a лежить у площині α	Паралельні	Перетинаються	Перпендикулярні	Паралельні	Перетинаються
	$a \parallel b$			$a \parallel \alpha$		$a \perp \alpha$	$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \perp \beta$

МНОГОГРАННИКИ

ПРИЗМА	ПІРАМІДА
Довільна призма (дві грані — рівні n-кутники, а всі інші n граней — паралелограми)	(одна грань — n-кутник, а всі інші — трикутники зі спільною вершиною)
Пряма призма (бічні ребра перпендикулярні до площини основи) $AA_1 \perp \text{пл. } ABC, AA_1 = H_{\text{призми}}$ $S_{\text{бічної поверхні}} = P_{\text{основи}} \cdot H$ $V_{\text{призми}} = S_{\text{основи}} \cdot H$	$SO \perp \text{пл. } ABC, SO = H_{\text{піраміди}}$ $S_{\text{повної поверхні}} = S_{\text{основи}} + S_{\text{бічних поверхонь}}$ $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} \cdot H$

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

ЦИЛІНДР	КОНУС	КУЛЯ
$OABO_1$ — прямокутник, $OA = R_{\text{основи}}$ $AB = OO_1 = H_{\text{циліндра}}$ $S_{\text{бічної поверхні}} = 2\pi RH$ $S_{\text{повної поверхні}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H$	$\triangle SOA$ — прямокутний ($\angle SOA = 90^\circ$) $OA = R_{\text{основи}}; SO = H_{\text{конуса}}$ $SA = l$ — твірна конуса $S_{\text{бічної поверхні}} = \pi Rl$ $S_{\text{повної поверхні}} = \pi Rl + \pi R^2$ $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$	BC — діаметр круга, що обертається $OB = OC = OA = R_{\text{кулі}}$ $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi R^3$