

1) Tính:

$$\text{a) } A = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{7}{2}.$$

$$\text{b) } B = \sqrt{25} - 1 = \sqrt{5^2} - 1 = 5 - 1 = 4.$$

$$\text{Vậy } B = 4.$$

2)

$$\text{a) } x + 2 = 9 \Leftrightarrow x = 9 - 2 \Leftrightarrow x = 7.$$

$$\text{Vậy } x = 7.$$

$$\text{2b) DKXD: } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

$$\sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 9-1 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (tm)}.$$

$$\text{Vậy } x = 8.$$

Câu II

1) Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) - 4(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 4\}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -2 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = (1; -1)$.

Câu III

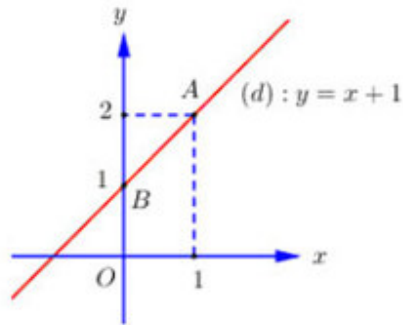
1) $A(1;2) \in (d): y = x + m$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng (d) ta có:

$$2 = 1 + m \Leftrightarrow m = 2 - 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) là $y = x + 1$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (d)$ đi qua điểm $B(0;1)$.

Vẽ đường thẳng (d) .



2)

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có:

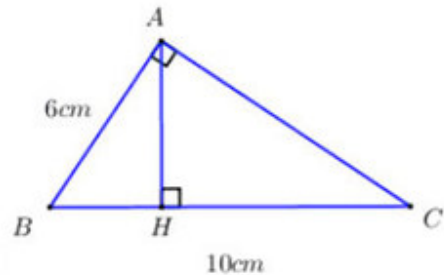
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 6^2 + AC^2 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Leftrightarrow AC = 8 \text{ (cm)}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot 10 = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow AH = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ (cm)}.$$

Diện tích tam giác vuông ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$



3) Một người đi xe máy từ A đến B với thời gian và vận tốc đã dự định. Nếu người đó đi nhanh hơn dự định trong mỗi giờ là 10km thì đến đích sớm hơn dự định là 36 phút. Nếu người đó đi chậm hơn dự định trong mỗi giờ là 10km thì đến đích muộn hơn dự định là 1 giờ. Tính vận tốc dự định của người đó và chiều dài quãng đường AB.

Gọi vận tốc dự định và thời gian dự định đi hết quãng đường AB lần lượt là x (km/h) và y (h) (ĐK: $x, y > 0$).

Khi đó độ dài quãng đường AB là xy (km).

+) Nếu người đó đi nhanh hơn dự định trong mỗi giờ là 10km, tức là đi với vận tốc $x+10$ (km/h) thì người đó đến đích sớm hơn dự định 36 phút $= \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ (h), tức là đi hết quãng đường trong $y - \frac{3}{5}$ (h).

Khi đó độ dài quãng đường AB là $(x+10)\left(y - \frac{3}{5}\right) = xy$.

$$\Leftrightarrow xy - \frac{3}{5}x + 10y - 6 = xy \Leftrightarrow -\frac{3}{5}x + 10y - 6 = 0 \Leftrightarrow -3x + 50y - 30 = 0 \quad (1)$$

+) Nếu người đó đi chậm hơn dự định trong mỗi giờ là 10km, tức là đi với vận tốc $x-10$ (km/h) thì người đó đến đích muộn hơn dự định 1 (h), tức là đi hết quãng đường trong $y+1$ (h).

Khi đó độ dài quãng đường AB là $(x-10)(y+1) = xy$.

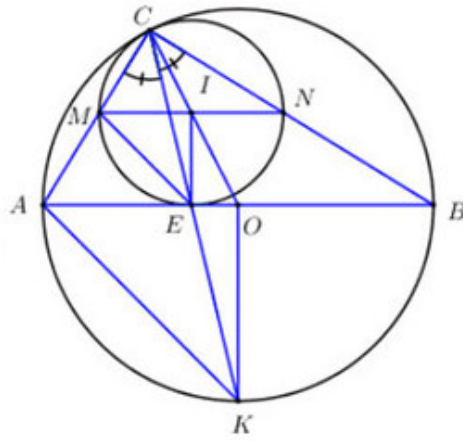
$$\Leftrightarrow xy + x - 10y - 10 = xy \Leftrightarrow x - 10y - 10 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x + 50y - 30 = 0 \\ x - 10y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 50y = -30 \\ 3x - 30y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20y = -60 \\ x - 10y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \text{ (tm)} \\ x - 30 - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (tm)} \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định và thời gian dự định đi hết quãng đường AB lần lượt là 40 km/h và 3h, độ dài quãng đường AB là $xy = 40 \cdot 3 = 120$ (km).

Câu IV



1)

Ta có $\angle KAB = \angle KCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK), lại có $\angle KCB = \angle KCA$ (gt).

$$\Rightarrow \angle KAB = \angle KCA \text{ hay } \angle KAE = \angle KCA.$$

Xét tam giác KAE và tam giác KCA có:

$\angle AKC$ chung;

$$\angle KAE = \angle KCA \text{ (cmt);}$$

$$\Rightarrow \Delta KAE \sim \Delta KCA \text{ (g.g)}$$

2) Cho đường tròn (I) đi qua điểm E và tiếp xúc với đường tròn (O) tại tiếp điểm C , đường tròn (I) cắt CA, CB tại điểm thứ hai theo thứ tự là M, N . Chứng minh rằng MN song song với AB .

* Xác định điểm I .

Do (I) và (O) tiếp xúc tại $C \Rightarrow I, O, C$ thẳng hàng $\Rightarrow I \in OC$.

Lại có (I) đi qua $C, E \Rightarrow IC = IE \Rightarrow I$ thuộc trung trực của CE .

Do đó I là giao điểm của OC và đường trung trực của CE .

* Chứng minh $MN \parallel AB$.

Nối OK ta có: ΔOCK cân tại O ($OC = OK$) $\Rightarrow \angle OCK = \angle OKC$.

ΔICE cân tại I ($IC = IE$) $\Rightarrow \angle ICE = \angle IEC$ hay $\angle OCK = \angle IEC$.

$\Rightarrow \angle OKC = \angle IEC$. Mà 2 góc này ở vị trí hai góc đồng vị bằng nhau $\Rightarrow IE \parallel OK$ (1).

Xét đường tròn (O) : $\angle ACK = \angle BCK$ (gt) $\Rightarrow$ sđ cung $AK =$ sđ cung BK (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB của $(O) \Rightarrow OK \perp AB$ (2).

Xét đường tròn (I) ta có $\angle MCN = 90^\circ \Rightarrow \angle MCN$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow MN$ là đường kính của (I) .

Ta có: $\angle ACK = \angle BCK \Rightarrow \angle MCE = \angle NCE \Rightarrow$ sđ cung $ME =$ sđ cung NE (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung MN của $(O) \Rightarrow IE \perp MN$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra được $MN \parallel AB$ (đpcm).

Câu V

ĐK: $x \neq -1$.

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1}.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} = 1.$$

$$\text{Đặt } \frac{x^2}{x+1} = t \text{ ta có phương trình } t^2 + 2t = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (*).$$

$$\Delta_t = 1^2 + 1 = 2 > 0 \Rightarrow (*) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \begin{cases} t_1 = -1 + \sqrt{2} \\ t_2 = -1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ ta có: } \frac{x^2}{x+1} = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0.$$

$$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2 - 4(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 > 0 \Rightarrow \text{Phương trình có 2 nghiệm phân biệt } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t_2 = -1 - \sqrt{2} \text{ ta có: } \frac{x^2}{x+1} = -1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} + 1 = 0.$$

$$\Delta = (\sqrt{2} + 1)^2 - 4(\sqrt{2} + 1) = -1 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \end{cases}.$$