



MATEMÁTICAS

➤ Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

➤ Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1.- Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & & & & & & & \end{pmatrix}$

(a) (0,75 puntos) Calcule el determinante y el rango de P para cada valor de a .

Resolución

$$\det P = -2 + 2a - 2 = 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2$, $\det P \neq 0$ y $\text{rg } P = 3$

- Si $a = 2$, $\det P = 0$, $\text{rg } P < 3$; $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & & & & & & & \end{pmatrix}$. Como $|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}| = 2 \neq 0$, $\text{rg } P = 2$.

(b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.

(c) (0,75 puntos) Para $a = 1$, calcule $\det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

Resolución

Para $a = 1$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & & & & & & & \end{pmatrix}$; $\det P = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0$

(b)

$$\exists P^{-1} = \frac{1}{\det P} (\text{adj } P)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Llamemos $x = |M|$. Aplicando las propiedades de los determinantes,

$$|PM| = |M^2| \Rightarrow |P||M| = |M|^2 \Rightarrow -2x = x^2 \Rightarrow x^2 + 2x = x(x+2) = 0. \text{ Luego, } |M| = 0 \text{ ó } |M| = -2$$

Pregunta 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a .

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 + 2a + 4 = 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

- Si $a \neq -3$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $a = -3$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como $|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 f_2 = 3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}| = -1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(b) (0,75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.

Resolución

Para $a = -3$ sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones y la matriz del sistema es equivalente

a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} -x + y + 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$. Despejando, $y = 1 - 2z$

$x = y + 3z - 1 = 1 - 2z + 3z - 1 = z$. Llamando $z = k$, las soluciones son $\{x = k, y = 1 - 2k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

(c) (0,75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

Resolución

Usando las soluciones del (b), $\{x = k, y = 1 - 2k, z = k\}$, si $x = 1$, entonces $k = 1$ y la solución es $\{x = 1, y = -1, z = 1\}$

Pregunta 3.- Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) (0,75 puntos) Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.

Resolución

$$f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}, f'(x) = \frac{2x(Bx - 1) - (x^2 + A)B}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - AB}{(Bx - 1)^2}$$

Como la gráfica de f pasa por $(0, -3)$, entonces $-3 = f(0) = \frac{0^2 + A}{B \cdot 0 - 1} \Rightarrow A = 3$.

$$\text{Nos queda } f(x) = \frac{x^2 + 3}{Bx - 1}, f'(x) = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx - 1)^2}$$

Como f tiene un extremo en $x = -1$, entonces $0 = f'(-1) = \frac{B(-1)^2 - 2(-1) - 3B}{[B(-1) - 1]^2} = \frac{2 - 2B}{(-B - 1)^2} \Rightarrow B = 1$

Conclusión: debe ser $A = 3, B = 1$.

(b) (1,25 puntos) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

Resolución

$$\text{Para } A = 3, B = 1 \text{ nos queda } f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}, f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1^2 + 3}{1 - 1} = \frac{4}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1 \text{ cuya ecuación es A.V. : } x = 1$$

Además, $f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$. Luego, f NO tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: $y = mx + n$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3}{x^2-x} = \frac{1}{1} = 1$.

$[f(x) - mx] = \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x \right) \frac{x+3}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$

Luego, la asíntota oblicua en $\pm\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x + 1$

$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2+3}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2+3-(x^2-1)}{x-1} = \frac{4}{x-1}$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}, x = -1, x = 3$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	$\nexists$	decreciente	mínimo	creciente

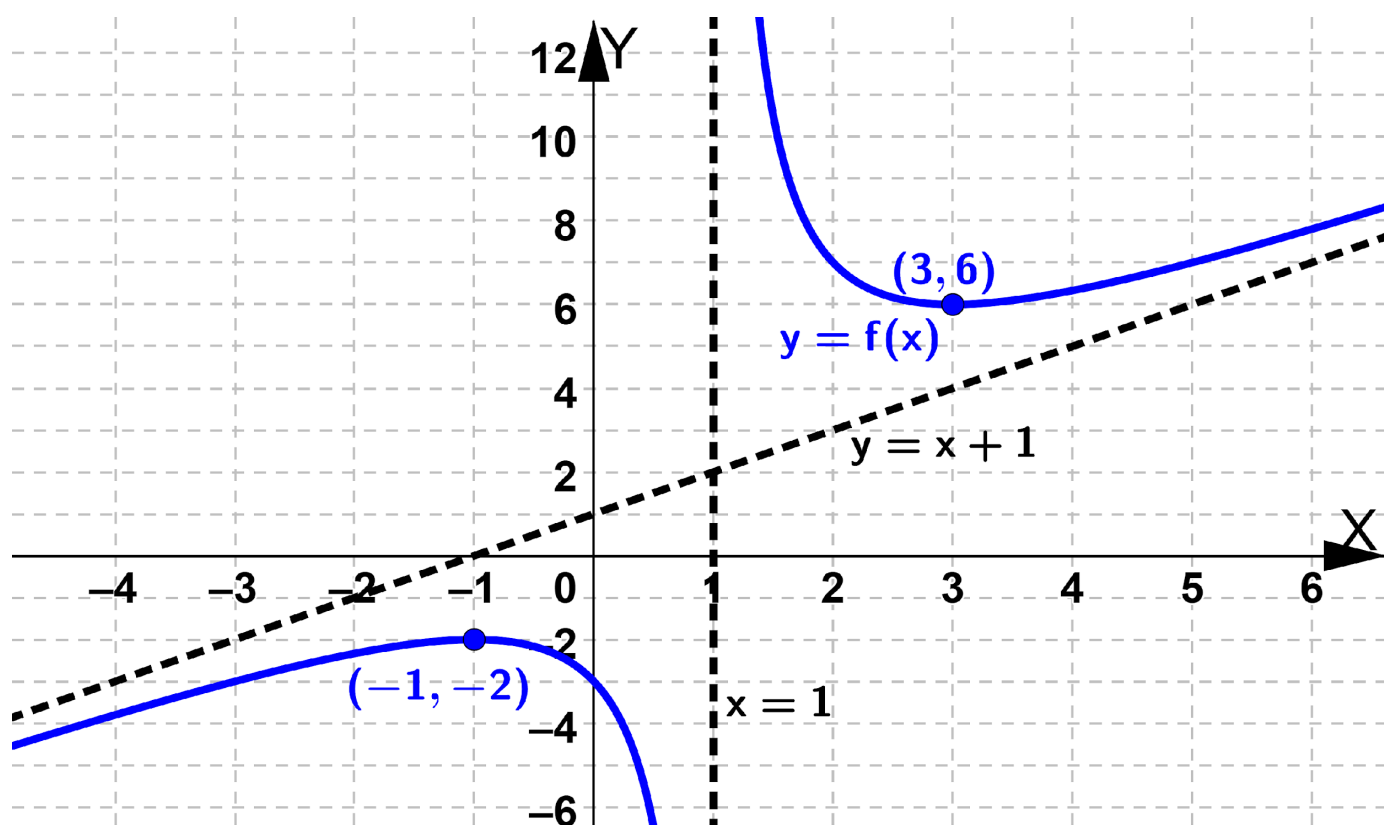
Máximo relativo: $x = -1$, $y = f(-1) = \frac{(-1)^2+3}{-1-1} = -2$, punto $(-1, -2)$

Mínimo relativo: $x = 3$, $y = f(3) = \frac{3^2+3}{3-1} = 6$, punto $(3, 6)$

(c) (0,5 puntos) Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Resolución

Sabemos que $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Un esbozo de su gráfica es



Pregunta 4.- Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide

(a) (1,5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$.

(Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$).

(b) (1 punto) Calcula el área encerrada por la gráfica de f , las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Resolución

(a) Las primitivas de f son de la forma $F(x) = \int f(x) dx = \int xe^{2x^2} dx$.

Haciendo el cambio $t = 2x^2$; $dt = 4x dx \rightarrow x dx = \frac{1}{4} dt$.

Sustituyendo queda $\int \frac{1}{4} e^t dt = \frac{1}{4} e^t + k$. Luego, $F(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + k$.

Como la primitiva pasa por $(0, -1)$, entonces $-1 = F(0) = \frac{1}{4} e^{2 \cdot 0^2} + k = \frac{1}{4} + k \Rightarrow k = \frac{-5}{4}$

Por tanto, la primitiva que se busca es $F(x) = \frac{e^{2x^2} - 5}{4}$

(b) En el intervalo $(0, 1)$ la función $f(x) = xe^{2x^2}$ es positiva. Luego, el área que se pide es $A = \int_0^1 f(x) dx$

Por la regla de Barrow, $A = F(1) - F(0) = \frac{e^{2 \cdot 1^2} - 5}{4} - \frac{e^{2 \cdot 0^2} - 5}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \cong 1,597 u^2$

Pregunta 5.- Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y-2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 1) y B(2, 1, 2).

(a) (1 punto) Indica la posición relativa de r y s.

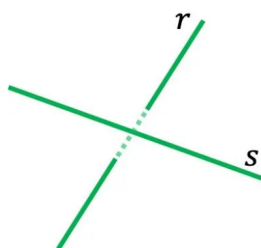
Resolución

La recta r pasa por A(1, 0, 1) y tiene vector director $\vec{d}_r = \vec{AB} = (1, 1, 1)$

La recta s pasa por P(2, 2, 0) y un vector director es $\vec{d}_s = (1, -1, 1)$

Como $\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & & & \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 - 1 - 2 - 1 = -4 \neq 0$, entonces los

vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{AP}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



(b) (0,75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

Resolución

El plano que se pide, α , pasa por P(2, 2, 0) $\in s$ y tiene como vectores directores $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Luego, un vector normal de α es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) // (1, 0, -1)$$

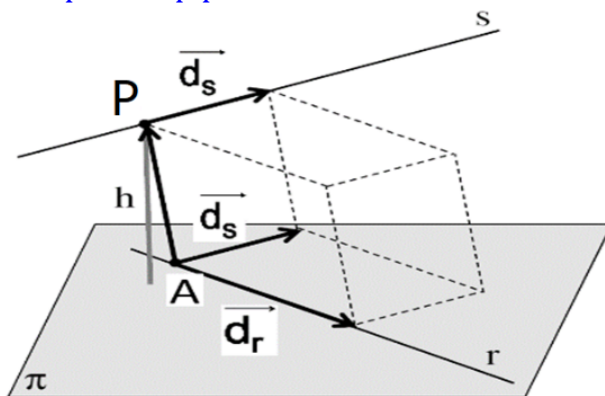
Por tanto, $\alpha: 1(x-2) + 0(y-2) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow \alpha: x - z - 2 = 0$

(c) (0,75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Resolución

Sabemos que r y s se cruzan ; A(1, 0, 1) $\in r$, $\vec{d}_r = (1, 1, 1)$; P(2, 2, 0) $\in s$, $\vec{d}_s = (1, -1, 1)$

Usamos la fórmula de la altura del paralelepípedo:



$$V_{\text{paralel}} = A_{\text{base}} \cdot h \rightarrow h = d(r, s) = \frac{V_{\text{paralel}}}{A_{\text{base}}} = \frac{|\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AP})|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

$$\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & & & \end{vmatrix} = -4 \quad ; \quad \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2, 0, -2)$$

Luego, $d(r, s) = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cong 1,41 \text{ u}$

Pregunta 6.- Dados dos planos $\pi: x + y + z = 3$, $\pi': x + y = 3$ y el punto $A(2, 1, 6)$

(a) (0,75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .

Resolución

$r: \{x + y + z = 3 \quad x + y = 3\}$. Un vector director de r es el producto vectorial de los planos que la definen:

$$\vec{d}_r = (1, 1, 1) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Halleamos un punto de r : si $x = 0$, $\{y + z = 3 \quad y = 3\}$; $3 + z = 3, z = 0$. Luego, $B(0, 3, 0) \in r$

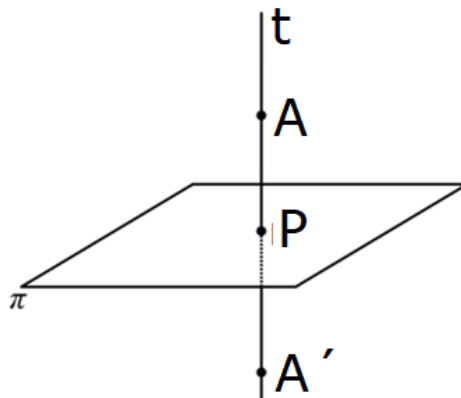
(b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .

(c) (0,75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

Resolución

Observamos que $A(2, 1, 6) \notin \pi: x + y + z = 3$ porque no cumple su ecuación: $2 + 1 + 6 = 9 \neq 3$

Sea $A'(a, b, c)$ el simétrico de A respecto del plano π



- Hallamos la recta t que pasa por A y es ortogonal a π :

Un vector director de t es el vector normal del plano, $\vec{d}_t = \vec{n} = (1, 1, 1)$. Luego,

$$r: \{x = 2 + k \quad y = 1 + k \quad z = 6 + k\}$$

- Hallamos el punto de corte, P , entre el plano π y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene $2 + k + 1 + k + 6 + k = 3$; $3k = -6$; $k = -2$

Luego, $\{x = 2 - 2 \quad y = 1 - 2 \quad z = 6 - 2\}$. El punto de corte es $P(0, -1, 4)$

- Por último, hallamos el simétrico $A'(a, b, c)$ de $A(2, 1, 6)$ usando que $P(0, -1, 4)$ es el punto medio del segmento AA' :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a+2}{2} &= 0 \Rightarrow a = -2 \\ \frac{b+1}{2} &= -1 \Rightarrow b = -3 \\ \frac{c+6}{2} &= 4 \Rightarrow c = 2 \end{aligned} \right. \quad \text{El punto simétrico que se pide es } A'(-2, -3, 2)$$

Pregunta 7.- Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1,6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B solo el 0,9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

- (a) (1,25 puntos) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
 (b) (1,25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Resolución

A = la caja la compra la empresa A B = la caja la compra la empresa B D = la caja es defectuosa

Según el enunciado, $p(A) = 0,6$ $p(B) = 0,4$ $p(D/A) = 0,016$ $p(D/B) = 0,009$

a) Se pide $p(D)$. Por el teorema de probabilidad total,

$$p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) = 0,6 \cdot 0,016 + 0,4 \cdot 0,009 = 0,0132 = 1,32\%$$

b) Primero observa que $p(D^c/A) = 1 - p(D/A) = 1 - 0,016 = 0,984$.

$$\text{Se pide } p\left(\frac{A}{D^c}\right) = \frac{p(A \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(A) p(D^c/A)}{1 - p(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,984}{1 - 0,0132} \cong 0,5983 = 59,83\%$$

Pregunta 8.- Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

- (a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7,5.
 (b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
 (c) (1 punto) Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1,5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0,52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$ $F(0) = 0,5$ $F(1,25) = 0,8944$
 $F(0,05) = 0,52$ $F(0,52) = 0,6985$ $F(0,8944) = 0,8133$ $F(1) = 0,8413$.

Resolución

$$X = \text{calificaciones} \rightarrow N(5, 2) \Rightarrow Z = \frac{X-5}{2} \rightarrow N(0, 1).$$

$$\text{a) Se pide } p(X \geq 7,5) = p\left(\frac{X-5}{2} \geq \frac{7,5-5}{2}\right) = p(Z \geq 1,25) = 1 - p(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 10,56\%$$

$$\text{b) Se pide } p(3 < X < 5) = p\left(\frac{3-5}{2} < \frac{X-5}{2} < \frac{5-5}{2}\right) = p(-1 < Z < 0) =$$

$$p(Z < 0) - p(Z > 1) = p(Z < 0) - 1 + p(Z \leq 1) = 0,5 - 1 + 0,8413 = 0,3413 = 34,13\%$$

$$\text{c) Ahora } X = \text{calificaciones} \rightarrow N(\mu; 1,5) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{1,5} \rightarrow N(0, 1)$$

$$\text{Además, nos dicen que } 0,52 = p(X \leq 6) = p\left(\frac{X-\mu}{1,5} \leq \frac{6-\mu}{1,5}\right) = p\left(Z \leq \frac{6-\mu}{1,5}\right)$$

$$\text{Usando la tabla de la } N(0, 1) \text{ en sentido inverso, } \frac{6-\mu}{1,5} \cong 0,05$$

$$\text{Despejando, la media sería ahora } \mu \cong 6 - 0,05 \cdot 1,5 = 5,925$$

El nuevo sistema ha funcionado pues la nota media ha subido (de 5 a 5,925) y la dispersión de los datos ha disminuido (de 2 a 1,5).