

Цель занятия:**Деятельностная:**

- создать условия для сознательного усвоения учащимися методов решения простейших тригонометрических уравнений.

Содержательная:

- актуализировать знания об уравнениях; тригонометрических функциях, обратных тригонометрических функциях;
- расширить знания учеников за счет введения нового объекта – тригонометрического уравнения;
- познакомиться с задачами на решение простейших тригонометрических уравнений.

План занятия:

1. Простейшие тригонометрические уравнения
2. Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$
4. Уравнения вида $\sin(kx+b)=a$ и подобные ему

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрические уравнения – такие уравнения, в которых неизвестная заключена строго под знаком тригонометрической функции.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются такие уравнения, которые записаны в виде:

$$\cos f(x) = a, \sin f(x) = a, \operatorname{tg} f(x) = a, \operatorname{ctg} f(x) = a.$$

Здесь a представляет собой некое постоянное число.

Заметим, что $f(x)$ является какой-то функцией, которая определяется искомой переменной x .

В том случае, когда уравнения записаны в виде: $\cos f(x) = a, \sin f(x) = a$, они обладают смыслом при $-1 \leq a \leq 1$.

Если уравнения имеют вид: $\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$, то такие уравнения справедливы при любых значениях, которые принимает a .

2. Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$ **Уравнение $\cos x = a$**

если $a \in (-1; 1)$, то множеством решений уравнения является

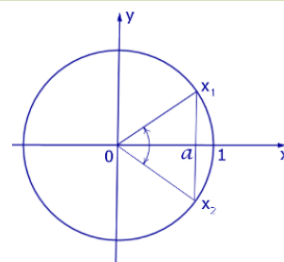
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

если $a = -1$, то корнями уравнения будут $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

а если $a = 1$, то корни $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

а если $a = 0$, то корни $x = \frac{1}{2}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

если же $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ решений не имеет.

**Уравнение $\sin x = a$**

если $a \in (-1; 1)$, то множеством решений уравнения является

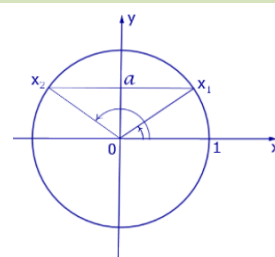
$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

если $a = -1$, то корнями уравнения будут $x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

а если $a = 1$, то корни $x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

а если $a = 0$, то корни $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

если же $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ решений не имеет.



Памятка:

1) $\sin x = a$ Если $a > 1$ уравнение корней не имеет. Если $a \leq 1$, решение находим по формуле: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Частные случаи: $\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n; \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$	2) $\cos x = a$ Если $a > 1$ уравнение корней не имеет. Если $a \leq 1$, решение находим по формуле: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Частные случаи: $\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n; \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n. \end{cases}$
---	--

4. Уравнения вида $\sin(kx+b)=a$ и подобные ему

Уравнения вида $\sin(kx+b)=a$, $\cos(kx+b)=a$ сводятся к простейшим с помощью замены переменной.

Пример. Решить уравнение:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пусть: $y = 3x - \frac{\pi}{4}$, тогда $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решать подобные уравнения мы уже пробовали сегодня: $y = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, тогда

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

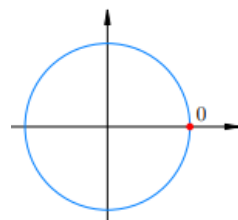
Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$

Задачи с решением

1. $\cos x = 1$.

Нас интересуют точки тригонометрической окружности, которые имеют абсциссу 1. Легко видеть, что имеется лишь одна такая точка:

Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: 0, 2π , -2π , 4π , -4π , 6π , -6π , . . . Все перечисленные углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (то есть нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону). Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Это и есть множество решений уравнения $\cos x = 1$.

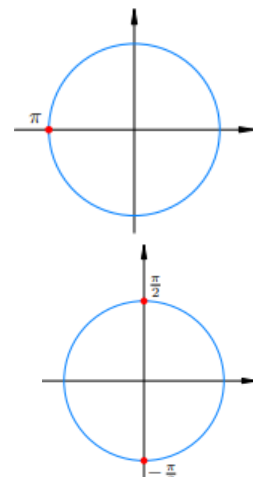


2. $\cos x = -1$.

На тригонометрической окружности имеется лишь одна точка с абсциссой -1 : π . Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающимся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, то есть на целое число полных углов. Следовательно, все решения уравнения $\cos x = -1$ записываются формулой:

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\cos x = 0$.



Отмечаем на тригонометрической окружности точки с нулевой абсциссой. Их две: Эти точки образуют диаметральную пару (то есть служат концами диаметра тригонометрической окружности). Все углы, отвечающие точкам диаметральной пары, отличаются друг от друга на целое число углов π (то есть на целое число полуоборотов как в одну, так и в другую сторону).

Следовательно, все решения уравнения $\cos x = 0$ описываются формулой:

$$x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

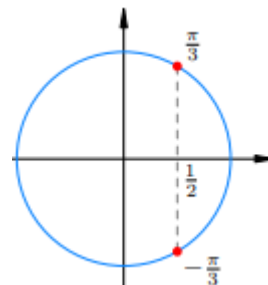
$$4. \cos x = 1/2.$$

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $1/2$:

Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой: $x_1 = \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

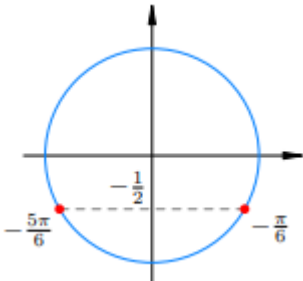
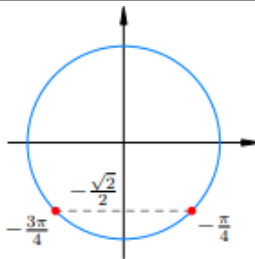
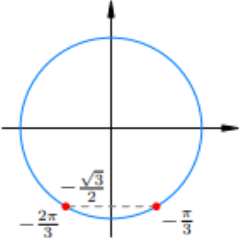
Все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой: $x_2 = -\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Обе серии решений можно описать одной формулой: $x = \pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



№	Условие	Рисунок	Ответ
5	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
6	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
7	$\cos x = -\frac{1}{2}$		$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
8	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
9	$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

10	$\cos x = \frac{2}{3}$		$x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
11	$\cos x = -\frac{2}{3}$		$x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
12	$\sin x = 1.$		$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
13	$\sin x = -1.$		$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
14	$\sin x = 0.$		$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
15	$\sin x = \frac{1}{2}$		$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
16	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
17	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

18	$\sin x = -\frac{1}{2}$		$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
19	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
20	$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Какие основные условия накладываются на область значений тригонометрических функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$? Они влияют на решение уравнений?

1.2. Приведите основные расчетные формулы для решения простейших тригонометрических уравнений $\cos x = a$ и $\sin x = a$.

1.3. Приведите примеры частных случаев тригонометрических уравнений $\cos x = a$ и $\sin x = a$ и их решения.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Решите уравнения

а) $\cos 2x = 1$;

б) $\cos 3x = -1$;

в) $\sin \frac{x}{2} = -1$;

г) $\sin \frac{2x}{3} = 1$;

2.2. Решите уравнения

а) $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$;

б) $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$;

в) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$;

г) $\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = -1$;

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 10 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 03.02.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 03.02.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: <https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.