

Лекція 16

3.2 Вейвлет-перетворення

Можна використовувати у якості вейвлетів безперервні функції, наприклад, **вейвлет «сомбреро»** (рис. 3.3)

$$\psi(x) = (x^2 - 1) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad (3.7)$$

– математично це друга похідна від гаусова імпульса.

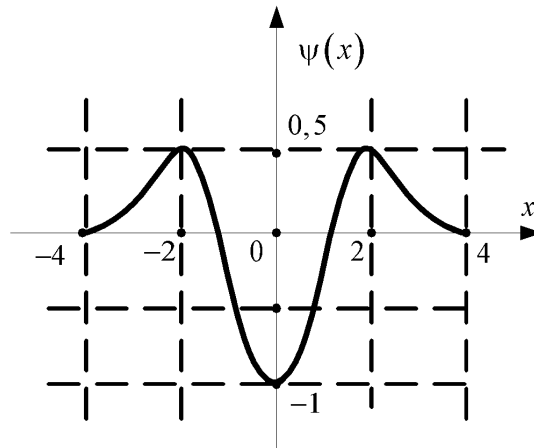


Рисунок 3.3.

Безперервні вейвлети мають ті ж властивості, що й дискретні, тобто можна отримати вейвлети, які є функціями двох параметрів a та b :

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.8)$$

Множник $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ забезпечує незалежність норми цих сигналів від вибору масштабуючого числа a . Вейвлет-перетворення (ВП) $s(t)$ це функція

$$W_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.9)$$

Сенс у ВП такий же, що й у ПФ, але ядро перетворення вейвлет $\left(\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right)$ замість $e^{-j\omega t}$. У (3.9) коефіцієнт a аналогічний періоду коливань (тобто зворотний до частоти), b – зміщенню сигналу за часом.

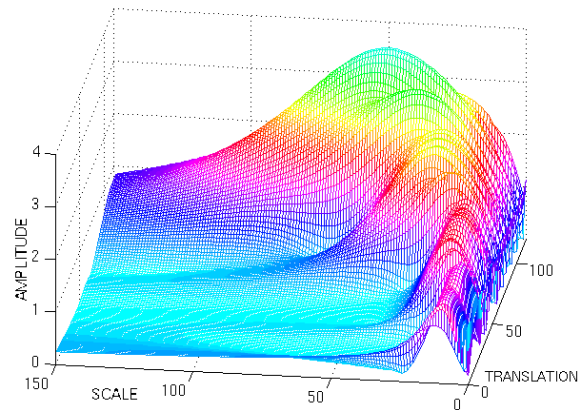
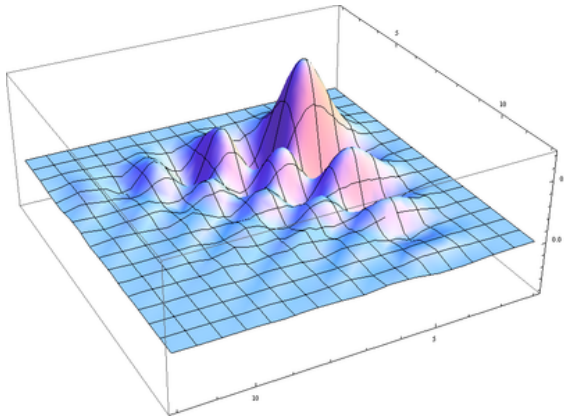
Якщо $s(t)$ – це одиночний імпульс, зосереджений навколо точки $t = t_0$ з тривалістю τ_u , то його ВП буде приймати максимальне значення навколо точки $a = \tau_u$, $b = t_0$.

Зворотне ВП має вигляд:

$$s(t) = \frac{1}{\|\psi_{ab}\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_s(a, b) \psi_{ab}(t) da db, \quad (3.10)$$

В ньому дуже чітко простежується аналогія з ПФ та ЗПФ.

Найчастіше вейвлет-перетворення застосовується для опису різних імпульсних неперіодичних сигналів, для стиснення та розпізнавання сигналів, у медицині та при обробці зображень.



9 Лінійні динамічні системи

9.1 Метод диференціальних рівнянь

Метод диференціальних рівнянь – це ще один метод описання систем, який може бути застосований для лінійних динамічних систем. Це такі системи, в яких сигнал на виході визначається не тільки величиною вхідного сигналу в поточний момент часу, а й всією «передісторією» вхідного процесу. Такі лінійні динамічні системи (ЛДС) описуються диференціальними рівняннями (ДР), а зв'язок між вхідним та вихідним сигналами встановлюється наступним чином

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n U_{BIX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BIX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d U_{BIX}}{dt} + a_0 U &= \\ &= b_m \frac{d^m U_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d U_{BX}}{dt} + b_0 U. \end{aligned} \quad (9.1)$$

На практиці зазвичай $U_{BX}(t)$ відомо, тобто ми знаємо, який сигнал подається на вхід нашого пристрою. Тоді права частина (9.1) – це деяка відома функція $f(t)$, отримаємо

$$a_{BHX} \frac{d^n U_{BHX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BHX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BHX}}{dt} + a_0 U = f(t) \quad (9.2)$$

це лінійне ДР n -го порядку з постійними коефіцієнтами. Порядок рівняння n називають порядком динамічної системи.

9.2 Власні коливання динамічних систем

Щоб повністю визначити поведінку динамічної системи (9.2) необхідне врахування початкових умов, котрі характеризують внутрішній стан системи в деякий фіксований момент часу. Математично початкові умови – це шукана функція та її $(n-1)$ похідна при $t=0$, тобто $U_{BHX}(0), U'_{BHX}(0), \dots, U^{n-1}_{BHX}(0)$.

З теорії ДР відомо, що розв'язання (9.2) має вигляд суми деякого частного рішення неоднорідного рівняння, у котрого права частина $f(t)$ відмінна від нуля, та загального рішення однорідного рівняння. Однорідне ДР – рівняння при умові, що на вхід не поступає ніякого сигналу, тобто $f(t)=0$. Неоднорідне ДР – при умові, що на вхід подається сигнал $f(t) \neq 0$. Розглянемо однорідне рівняння:

$$a_{BHX} \frac{d^n U_{BHX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BHX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BHX}}{dt} + a_0 U = 0 \quad (9.3)$$

Для розв'язання (9.3) складають характеристичне рівняння (це найпростіший метод розв'язання з математики, згідно з яким похідні ступеню n замінюють деяким параметром γ у відповідному ступіні):

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma^1 + a_0 = 0 \quad (9.4)$$

Характеристичне рівняння (9.4) має n коренів. Так як коефіцієнти рівняння (9.3) є речовими, то корені $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ можуть бути або речовими, або комплексними. Якщо всі корені різні, то загальне рішення однорідного ДР (9.3) має вигляд:

$$U_{BHX}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t} \quad (9.5)$$

Вираз (9.5) описує власні коливання системи, без зовнішнього впливу, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – постійні числа, які визначаються з початкових умов.

Якщо деякі з коренів виявляються кратними, то складові загального рішення однорідного рівняння стають більш складними за рахунок так званих секулярних множників. Так, якщо γ_i являє собою k -кратний корень, то йому відповідає сукупність власних коливань виду $e^{(\gamma_i t)}, t e^{(\gamma_i t)}, \dots, t^{k-1} e^{(\gamma_i t)}$.

9.3 Частотний коефіцієнт передачі лінійної динамічної системи

Нехай тепер, на відміну від випадку, розглянутого вище, на вхід системи поступає деякий сигнал, тобто $f(t) \neq 0$. Нехай це буде комплексний сигнал, який має математичну модель виду $u_{BX}(t) = e^{j\omega t}$, тоді сигнал на виході $u_{BHX}(t) = K(j\omega)e^{j\omega t}$, де $K(j\omega)$ – частотний коефіцієнт передачі системи. Підставимо ці вирази у (9.1)

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n U_{BHX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BHX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d U_{BHX}}{dt} + a_0 U_{BHX} &= \\ = b_m \frac{d^m U_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d U_{BX}}{dt} + b_0 U_{BX} \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n (K(j\omega)e^{j\omega t})}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} (K(j\omega)e^{j\omega t})}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d (K(j\omega)e^{j\omega t})}{dt} + a_0 K(j\omega)e^{j\omega t} &= \\ = b_m \frac{d^m (e^{j\omega t})}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} (e^{j\omega t})}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d (e^{j\omega t})}{dt} + b_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Винесемо в лівій частині загальний множник за дужки

$$\begin{aligned} K(j\omega) \left[a_n \frac{d^n (e^{j\omega t})}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} (e^{j\omega t})}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d (e^{j\omega t})}{dt} + a_0 e^{j\omega t} \right] &= \\ = b_m \frac{d^m (e^{j\omega t})}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} (e^{j\omega t})}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d (e^{j\omega t})}{dt} + b_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

З математики похідна від експоненти $(e^u)' = e^u \cdot u'$, тобто

$$(e^{j\omega t})' = e^{j\omega t} \cdot (j\omega t)' = e^{j\omega t} \frac{d(j\omega t)}{dt} = j\omega \cdot e^{j\omega t}, \text{ запишемо}$$

$$K(j\omega) [a_n (j\omega)^n e^{j\omega t} + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} e^{j\omega t} + \dots + a_0 e^{j\omega t}] = b_m (j\omega)^m e^{j\omega t} + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} e^{j\omega t} + \dots + b_0 e^{j\omega t}$$

Виразимо звідси частотний коефіцієнт та скоротимо в чисельнику та знаменнику загальний множник $e^{j\omega t}$

$$K(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (9.6)$$

Тобто частотний коефіцієнт передачі будь-якої динамічної системи, яка описується звичайним ДР з постійними коефіцієнтами, являє собою дрібно-раціональну функцію змінної $j\omega$, а коефіцієнти цієї функції співпадають з коефіцієнтами диференційного рівняння.

9.4 Стійкість динамічних систем

Лінійна система називається абсолютно стійкою, якщо всі її власні коливання мають характер процесів, які затухають у часі. Необхідною і достатньою умовою абсолютної стійкості є негативність реальних частин всіх коренів характеристичного рівняння (9.4). Ці корені також не повинні бути чисто уявними.

Власні коливання – це гармонічні коливання виду

$$u_{вл}(t) = \frac{\cos}{\sin}(\omega_0 t)$$

Невеликі випадкові зміни параметрів системи можуть привести до її переходу до нестійкого режиму, коли

$$u_{вл}(t) = e^{\alpha t} \cdot \frac{\cos}{\sin}(\omega_0 t), \alpha > 0$$

тобто амплітуда коливань наростає по експоненті у часі.

Якщо порядок динамічної системи великий, то пряма перевірка стійкості, заснована на знаходженні коренів характеристичного рівняння, дуже не проста. Тому були розроблені спеціальні критерії стійкості, які дозволяють визначити наявність коренів з позитивними реальними частинами без розв'язання характеристичного рівняння.

Виникнення власних коливань, які наростають, можливе в колах, де крім пасивних елементів R, L, C, містяться активні елементи, які передають частину енергії від зовнішніх джерел до кола.

Таким чином, ми роздивилися ще один метод аналізу ЛСС – метод диференціальних рівнянь. У відповідності з ним ми маємо скласти ДР для системи, яке описує її роботу, потім розв'язати однорідне рівняння, яке описує власні коливання в системі та знайти частотний коефіцієнт передачі системи. Знаючи $K(j\omega)$ можна знайти імпульсну характеристику $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

та перехідну характеристику $g(t)$ системи та працювати з тією з них, яка найбільш зручна для конкретної розв'язуваної задачі.

10 Спектральний метод

Ще один метод аналізу проходження радіотехнічних сигналів через лінійні стаціонарні системи називається спектральним методом, він заснований на перетворенні Фур'є (ПФ).

Нехай на вході деякої ЛЛС діє детермінований сигнал $s_{BX}(t)$, який заданий своїм інтегралом Фур'є (спектральною щільністю)

$$s_{BX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{BX}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (10.1)$$

Положимо, що математична модель системи задана частотним коефіцієнтом $K(j\omega)$. Тоді вихідний сигнал

$$\begin{aligned} s_{BHX}(t) &= K(j\omega) s_{BX}(t) = \frac{1}{2\pi} K(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} S_{BX}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) \cdot S_{BX}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{BHX}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{S_{BHX}(\omega)\}. \end{aligned} \quad (10.2)$$