

Câu 1. [2D3-4.2-3] (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

$[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{3}$. B. 2 . **C. $\frac{4}{3}$.** D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Trang; Fb: Trang Ngô

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}$. (*)

Đặt $u = f(x)$ và $dv = 4dx$ suy ra $du = f'(x)dx$, chọn $v = 4x$.

Khi đó $\int_0^1 4f(x) dx = 4xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 4xf'(x) dx = 4f(1) - \int_0^1 4xf'(x) dx = 8 - \int_0^1 4xf'(x) dx$

Thay vào (*) ta có: $\int_0^1 (f'(x))^2 dx + 8 - \int_0^1 4xf'(x) dx = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - \int_0^1 4xf'(x) dx + \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - \int_0^1 4xf'(x) dx + \int_0^1 4x^2 dx = 0$ (vì $\int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$)

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0$ (vì $(f'(x) - 2x)^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$)

$\Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + C$ (C là hằng số)

Mà $f(1) = 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$. Vậy $f(x) = x^2 + 1$.

Do đó: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$.

Trắc nghiệm

Dự đoán $f(x)$ là hàm đa thức bậc 2.

Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.

Ta có: $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$

$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2 + 4(ax^2+bx+c) = 8x^2 + 4, \quad \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow (4a^2+4a)x^2 + (4ab+4b)x + b^2+4c = 8x^2 + 4, \quad \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+4a=8 \\ 4ab+4b=0 \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases} \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases} \\ b=0 \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases} \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } f(1)=a+b+c=2 \quad \text{suy ra } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2+1. \text{ Do đó, } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}.$$