Câu 1. **[2D3-4.2-3] (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+4$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Trang; Fb: Trang Ngô

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x+\int_0^1 4f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (8x^2+4)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$. (*)

Đặt $u=f(x)$ và $\mathrm{d}v=4\mathrm{d}x$ suy ra $\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, chọn $v=4x$.

Khi đó $\int_0^1 4f(x)\mathrm{d}x=4xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x=4f(1)-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x=8-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào (*) ta có: $\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x+8-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x-\int_0^1 4xf'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 4x^2\mathrm{d}x=0$ (vì $\int_0^1 4x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$)

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x)-2x)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f'(x)-2x=0$ (Vì $(f'(x)-2x)^2\ge 0,\forall x\in[0;1]$)

$\Leftrightarrow f'(x)=2x\Leftrightarrow f(x)=x^2+C$ (C là hằng số)

Mà $f(1)=1+C=2\Rightarrow C=1$. Vậy $f(x)=x^2+1$.

Do đó: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Trắc nghiệm

Dự đoán $f(x)$ là hàm đa thức bậc 2.

Giả sử $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)\Rightarrow f'(x)=2ax+b$.

Ta có: $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+4$, $\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow \left(2ax+b\right)^2+4\left(ax^2+bx+c\right)=8x^2+4$, $\forall x\in\left[0;1\right]$

$\Leftrightarrow \left(4a^2+4a\right)x^2+\left(4ab+4b\right)x+b^2+4c=8x^2+4$, $\forall x\in\left[0;1\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+4a=8 \\ 4ab+4b=0 \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-1 \end{array}\right. \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right. \\ b=0 \\ b^2+4c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right. \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}.$$

Mà $f\left(1\right)=a+b+c=2$ suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right)=x^2+1$. Do đó, $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.