

PHYSIQUE : CONCOURS E.N.S. CACHAN 1996, OPTION B.

PREMIER PROBLÈME : OPTIQUE.

I. 1. Avec la convention d'orientation indiquée pour les angles, on a :

$$i = |i| > 0 ; A = |A| > 0 ; r = |r| > 0 ; D = |D| > 0 ;$$

$$\text{et } r' = -|r'| < 0 ; i' = -|i'| < 0.$$

En raisonnant dans le triangle EFG, on a :

$$\pi - |A| + |r| + |r'| = \pi ; \text{ d'où } .$$

Les réfractions sur les faces d'entrée et de sortie du prisme donnent (en admettant que le prisme est plongé dans l'air, d'indice de réfraction égal à 1) :

et .

I. 2. En raisonnant dans le triangle EFH : $\pi - |D| + |i| - |r| + |i'| - |r'| = \pi$; d'où : $D = i - i' - r + r'$.

Soit en tenant compte de I. 1., .

II. 1.

On écrit $D = D_1 + D_2$, où D_1 et D_2 sont les déviations dues aux deux prismes d'angle A .

Cf la question I. 2.: $D_1 = i - i_1 - A$ et $D_2 = i_2 - i' - A$.

En raisonnant dans le prisme intermédiaire d'angle A_0 , on a: $A_0 + \pi/2 - |i_1| + \pi/2 - |i_2| = \pi$, soit :

Remarquons que $A = \pi/2$. On obtient ainsi :.

II. 2. a. Pour un rayon incident parallèle à $z'z$ qui émerge du prisme à vision directe parallèlement à $z'z$, le système présente une symétrie plane par rapport au plan (Π) : dans le prisme intermédiaire, le rayon doit donc être perpendiculaire à (Π) , d'où la marche du rayon non dévié:

II. 2. b. L'angle d'incidence du rayon non dévié est tel que $i = \pi/2 - A_0/2$ (raisonner géométriquement ou écrire que $i' = -i$ et $D = 0$).

Dans le prisme intermédiaire, on a $i_2 = -i_1$, et $i_2 = \pi - A_0/2$.

Dans le prisme d'angle A , $r'_1 = r_1 - \pi/2$ (cf question I.1.).

La réfraction du rayon sur les différents dioptries conduit à :

$$\sin i = n \sin r_1 \quad \text{d'où} \quad \cos(A_0/2) = n \sin r_1.$$

$$\text{et} \quad n \sin r'_1 = n_0 \sin i_1 \quad \text{soit} \quad -n \cos r_1 = n_0 \sin i_1 \quad \text{ou encore} \quad n \cos r_1 = n_0 \sin(A_0/2).$$

On élimine r_1 en formant $\cos^2 r_1 + \sin^2 r_1$: il vient $n^2 = n_0^2 \sin^2(A_0/2) + \cos^2(A_0/2)$.

$$\text{Soit aussi: } n^2 - 1 = (n_0^2 - 1) \sin^2(A_0/2). \text{ Donc } A_0 = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{(n^2 - 1)}{(n_0^2 - 1)}}\right).$$

II. 2. c. Pour $\lambda = 589,3 \text{ nm}$, on a: $n = 1,51105$ et $n_0 = 1,63620$. D'où .

III. 1. a. L'OPPM de vecteur d'onde $\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_z$ éclairant le prisme est diffractée par celui-ci (on suppose que la diffraction n'est perceptible que suivant la direction définie par l'axe des x').

Soit un point M du plan focal image de L'_1 , repéré par son abscisse x' (ou l'angle θ), on observe en M la lumière diffractée à l'infini suivant cette direction θ .

Important: Les lentilles doivent être stigmatiques donc on peut supposer qu'elles sont utilisées dans les conditions de Gauss (on pourra confondre angles, sinus et tangentes).

Le problème posé revient à l'étude de la diffraction à l'infini par une fente fine, de largeur a , suivant x_0 éclairée par une OPPM tombant sous incidence normale.

Choisissons l'origine des phases en O et soit un point courant P de la fente, repéré par $\vec{r} = OP \vec{r}$.

L'amplitude complexe $\underline{\Psi}(\theta)$ de l'onde plane diffractée suivant θ , de vecteur d'onde $\vec{k}$ est donnée par application du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer:

$$\underline{Y}(q) = \underline{C} \int \exp\left(j(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}\right) \frac{dx_0}{a}, \text{ où } \underline{C} \text{ est une constante de proportionnalité.}$$

$$\text{Soit ici: } \underline{Y}(q) = \underline{C} \int \exp(jkx_0 \sin q) \frac{dx_0}{a} \text{ Posons } \beta = \frac{ka}{2} \sin q = p \frac{a}{\lambda_0} \sin q.$$

Le calcul de $\underline{\Psi}(\theta)$ conduit à l'expression: $\underline{Y}(q) = \underline{C} \frac{\sin \beta}{\beta}$.

L'éclairement est proportionnel au module carré de l'amplitude complexe. Notons $E(0)$ l'éclairement en F' pour $\theta = 0$ (donc $\beta = 0$).

On a: $E(\theta)/E(0) = \underline{\Psi}(\theta) \cdot \underline{\Psi}^*(\theta) / \underline{\Psi}(0) \cdot \underline{\Psi}^*(0)$. Soit: $E(q) = E(0) \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$.

De $x' = f'_1 \tan \theta$ et écrivant $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, on tire $\beta \gg p \frac{a \cdot x'}{\lambda_0 f'_1}$.

III. 1. b. Les premiers zéros de la fonction $E(x')$ sont tels que $\beta = \pm \pi$, soit $x' = \pm \lambda_0 f'_1 / a$.

D'où la largeur de la tache centrale de diffraction: $d_0 = \frac{2\lambda_0 f'_1}{a}$.

III. 1. c. On donne $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$; $a = 20 \text{ mm}$; $f'_1 = 200 \text{ mm}$. D'où $d_0 = 11,8 \text{ mm}$.

III. 2. Cette fois, la source primaire F est **spatialement incohérente**: on la découpe en fentes infiniment fines F_i , à l'abscisse x_i , émettant chacune une OPPM de longueur d'onde λ_0 . On observera sur l'écran la superposition de toutes ces figures de diffraction, centrées autour des images géométriques x'_i des fentes F_i .

En l'absence de diffraction, on obtiendrait sur l'écran une tache uniformément éclairée de largeur l (le grandissement transversal du doublet $L_1 L'_1$ étant égal à l'unité).

Si on tient compte de la diffraction, le problème est de savoir si on peut encore utiliser les calculs de la question précédente, et notamment de regarder si les différentes OPPM tombant sur le prisme émergent sans déviation (cf la question II. 2. a.):

Considérons la fente F_i d'abscisse $\pm l/2$. Les rayons issus de cette fente sont après L_1 inclinés sur l'axe optique d'un angle α , avec $\tan \alpha = \frac{l}{2f'_1}$, soit numériquement $\alpha = 125 \mu\text{rad}$.

On peut donc raisonnablement négliger la déviation D due au prisme sur les rayons ne se propageant pas rigoureusement parallèlement à l'axe $z'z$.

La demi-largeur angulaire d'une tache de diffraction telle que celle calculée à la question précédente est λ_0/a . La position angulaire du centre de la figure de diffraction est α .

Comparons ces deux grandeurs: $\alpha \approx 125 \cdot 10^{-6}$ et $\lambda_0/a \approx 29 \cdot 10^{-6}$. ainsi, on a : $\alpha \gg \lambda_0/a$.

On peut donc s'attendre à une disparition des franges par addition de toutes ces figures de diffraction et uniformisation de l'éclairement, sauf éventuellement aux bords extrêmes du champ éclairé.

Ainsi, on peut considérer que la diffraction altère assez peu l'image de la fente F prévue par les seules lois de l'optique géométrique (en négligeant les aberrations toutefois !).

III. 3. a. Avec une source polychromatique en F , on obtient à la sortie du prisme superposition d'ondes planes, inclinées d'un angle D dépendant de la longueur d'onde sur l'axe optique $z'z$.

Ces ondes planes convergent après L_2 aux points du plan focal image d'abscisse x'_{λ_i} avec:

$$x'_{\lambda_i} = f'_1 \cdot \tan D.$$

Les différentes radiations ont en commun le même angle d'incidence i tombant sur la face d'entrée du prisme. Cet angle a déjà été calculé à la question II. 2. b.

On calcule les différents angles de proche en proche, en tenant compte des réfractions sur

les dioptries et des relations géométriques dans le prisme..

λ (nm)	706,5	643,8	589,3	546,1	486,1
n	1,50707	1,50895	1,51105	1,51314	1,51700
n_0	1,62818	1,63191	1,63620	1,64020	1,64909

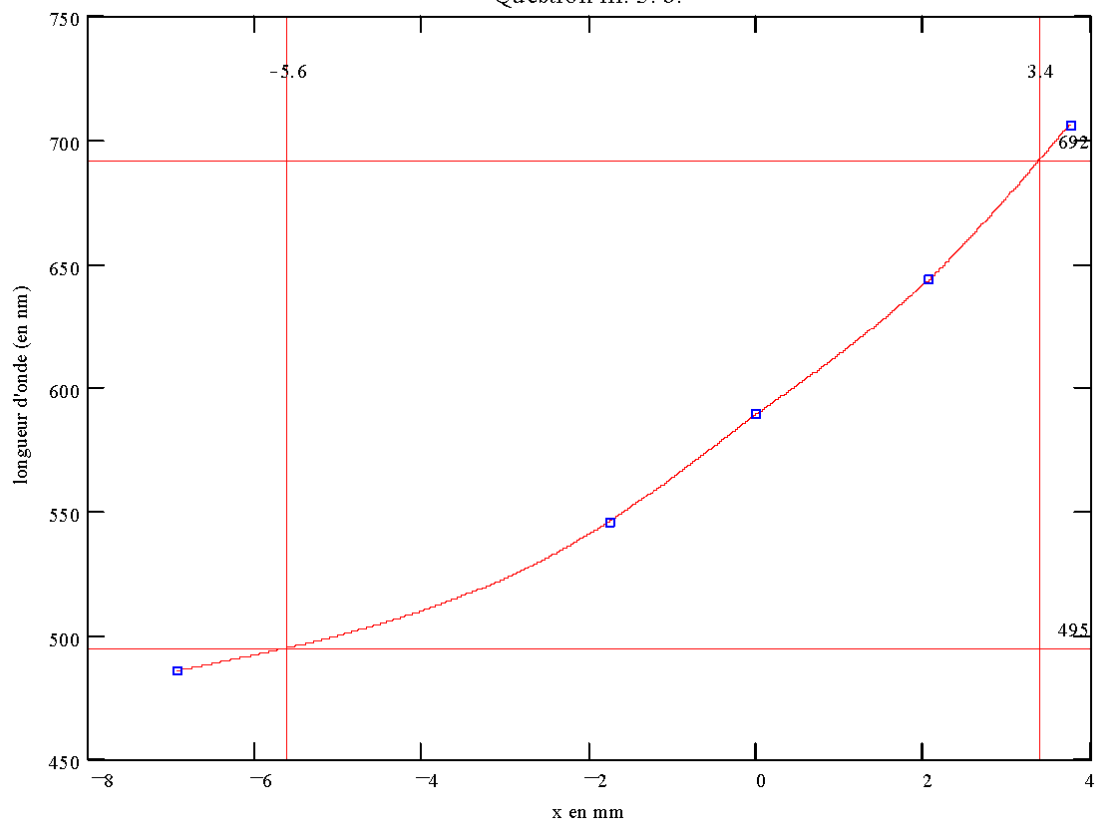
A_0 (radians)	2,12975	en degrés:	122,026
$i = \pi/2 - A_0 / 2$	0,50592		

$\sin(i) = n \sin(r_1)$		r_1	0,32738	0,32695	0,32648	0,32601
$r'_1 = r_1 - A$		r'_1	-1,24342	-1,24384	-1,24431	-1,24478
$n \sin(r'_1) = n_0 \sin(i_1)$		i_1	-1,06845	-1,06682	-1,06488	-1,06325
$i_2 = A_0 + i_1$		i_2	1,06130	1,06293	1,06488	1,06650
$n \sin(r_2) = n_0 \sin(i_2)$		r_2	1,23197	1,23755	1,24431	1,25015
$r'_2 = r_2 - A$		r'_2	-0,33883	-0,33324	-0,32648	-0,32065

$\sin(i') = n \sin(r'_2)$		i'	-0,52467	-0,51621	-0,50592	-0,49714
$D = A_0 + i - i' - \pi$		D	0,01875	0,01029	0,00000	-0,00879

$f_1 = 0,2 \text{ m}$	$x' = f_1 \cdot \tan(D)$	$x'(\lambda i) \text{ mm}$	3,75	2,06	0,00	-1,76	-6,92
-----------------------	--------------------------	----------------------------	------	------	------	-------	-------

Question III. 3. b.



IV. 1. a. Même principe que pour la question II.I 1. a., en remplaçant la fente diffractante de largeur a par le dispositif des fentes de Young, dont la transmittance en amplitude vérifie:

$$\{T(x) = 1 \text{ si } -\frac{(s+l_0)}{2} < x < \frac{(s-l_0)}{2} \text{ ou } -\frac{(s-l_0)}{2} < x < \frac{(s+l_0)}{2} \quad T(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Avec les notations déjà utilisées à la question III 1 a, il vient:

$$\underline{Y}(q) = \underline{C} \left[\int \exp(jkx \sin q) \frac{dx}{l_0} + \int \exp(jkx \sin q) \frac{dx}{l_0} \right]$$

qui conduit à $\underline{Y}(q) = \frac{4C}{l_0 k \sin q} \sin\left(\frac{l_0 k \sin q}{2}\right) \cos\left(\frac{s k \sin q}{2}\right)$.

L'éclairement s'écrit $E(\theta) = \underline{\Psi} \cdot \underline{\Psi}^*$, donnant : $E(q) = \frac{E(0)}{2} \text{sinc}^2\left(p \frac{l_0 \sin q}{\lambda_0}\right) \left[1 + \cos\left(2p \frac{s \sin q}{\lambda_0}\right)\right]$,
où on a posé $\text{sinc}(X) = \frac{\sin(X)}{X}$ (fonction sinus cardinal).

En terme de position linéaire sur l'axe Fx, on a $x = f_0 \tan(\theta)$. Avec l'hypothèse des angles faibles (cf les conditions de Gauss nécessaires), il vient:

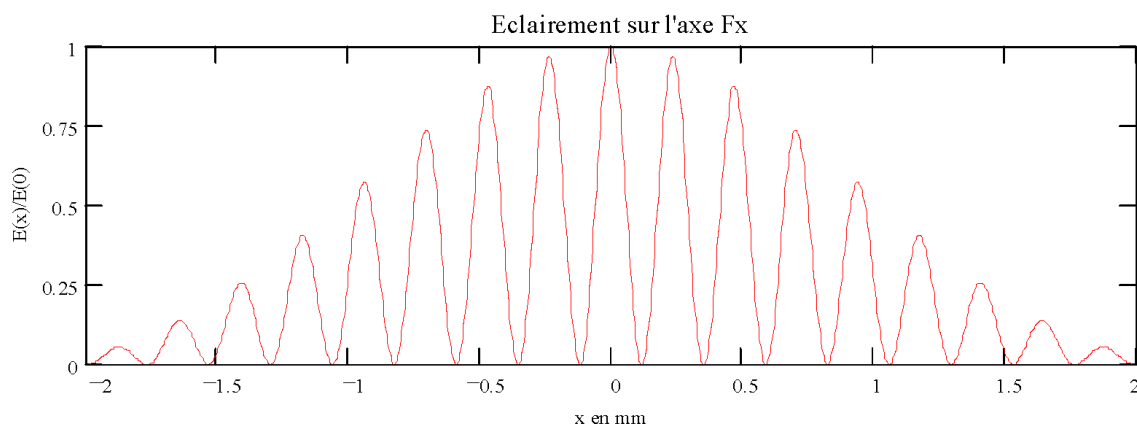
$$E(q) = \frac{E(0)}{2} \text{sinc}^2\left(p \frac{l_0 x}{\lambda_0 f_0}\right) \left[1 + \cos\left(2p \frac{s x}{\lambda_0 f_0}\right)\right]$$

On reconnaît dans $E(x)$ un premier terme en $\text{sinc}^2(X)$ représentant la diffraction à l'infini créée par chaque fente F_1 ou F_2 et un deuxième terme en $1 + \cos\left(2p \frac{x}{i}\right)$, avec $i = \frac{\lambda_0 f_0}{s}$, dû aux interférences entre F_1 et F_2 . Les franges d'interférences sont quasi rectilignes, équidistantes (i est l'interfrange) et parallèles aux fentes F_1 et F_2 .

IV. 1. b. En tenant compte des valeurs données, l'interfrange est: $i \gg 236 \text{ mm}$.

La demi-largeur de la tache centrale de diffraction est $dx = \frac{\lambda_0 f_0}{l_0}$, soit $dx \gg 2,36 \text{ mm}$ ($= 10 \cdot i$)

L'éclairement (pour F_0 ponctuelle) a l'allure suivante:



Réponse qualitative:

Si F_0 a une largeur l_0 , cela revient à considérer la source comme spatialement incohérente. On observe sur Fx la superposition des éclaircissements provenant des différents points de F_0 ,

figures identiques mais décalées sur Fx car centrées autour des images géométriques des points de F₀.

Ce décalage est au plus égal à $\pm l_0/2$ (F₀ et son image se déplacent en sens inverse et le grandissement transversal du système vaut -1).

Or numériquement, $\frac{l_0}{2} = 25\text{mm}$, soit **d'un peu moins d'un dixième d'interfrange**.

On peut donc qualitativement s'attendre à un étalement limité des franges, conduisant à une faible perte du contraste.

Réponse plus quantitative !

L'éclairement sur Fx dû à une fente élémentaire de F₀, située à l'abscisse x₀ et vue sous l'angle θ_0 s'obtient comme à la question IV.1.a. en changeant $\sin(\theta)$ par $\sin(\theta) + \sin(\theta_0)$.

On a aussi: $x_0 \approx f'_0 \cdot \theta$ et $x \approx f'_0 \cdot \theta$.

L'éclairement résultant s'écrit alors : $E(x) = \int A \text{sinc}^2 \left(\frac{pl_0}{\lambda_0 f'_0} (x_0 + x) \right) \left[1 + \cos \left(\frac{2ps}{\lambda_0 f'_0} (x_0 + x) \right) \right] \frac{dx_0}{l_0}$.

Dans le sinus cardinal, la quantité $\frac{pl_0 x_0}{\lambda_0 f'_0}$ varie au plus de $\pm \frac{pl_0^2}{\lambda_0 f'_0} \gg 0,01$. On peut donc

négliger les variations du sinus cardinal avec x₀ et sortir ce terme de l'intégrale (Sinon, ce n'est plus un calcul élémentaire !).

$$\text{Il vient: } E(x) = A \text{sinc}^2 \left(\frac{pl_0 x}{\lambda_0 f'_0} \right) \left\{ 1 + \frac{\lambda_0 f'_0}{2psl_0} \left[\text{sin} \left(\frac{2ps}{\lambda_0 f'_0} (x + x_0) \right) \right]_{-\frac{l_0}{2}}^{\frac{l_0}{2}} \right\}$$

$$E(x) = A \text{sinc}^2 \left(\frac{pl_0 x}{\lambda_0 f'_0} \right) \left\{ 1 + \frac{\lambda_0 f'_0}{2psl_0} \left[\text{sin} \left(\frac{2p}{\lambda_0 f'_0} (x + \frac{l_0}{2}) \right) - \text{sin} \left(\frac{2p}{\lambda_0 f'_0} (x - \frac{l_0}{2}) \right) \right] \right\}$$

$$\text{Or: } \text{sin}(p) - \text{sin}(q) = 2 \text{sin} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$\text{D'où } E(x) = A \text{sinc}^2 \left(\frac{pl_0 x}{\lambda_0 f'_0} \right) \left\{ 1 + \frac{\lambda_0 f'_0}{psl_0} \text{sin} \left(\frac{psl_0}{\lambda_0 f'_0} \right) \cos \left(\frac{2psx}{\lambda_0 f'_0} \right) \right\}.$$

$$\text{Qu'on écrit sous la forme: } E(x) = E_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{pl_0 x}{\lambda_0 f'_0} \right) \left\{ 1 + V \cos \left(\frac{2psx}{\lambda_0 f'_0} \right) \right\}, \text{ avec } V = \text{sinc} \left(\frac{psl_0}{\lambda_0 f'_0} \right).$$

Définissons le facteur de visibilité des franges par. $V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$.

Sur la largeur de la fente F, on peut négliger le terme dû à la diffraction et ne considérer que le terme en $1 + V \cos \left(\frac{2psx}{\lambda_0 f'_0} \right)$. Alors $E_{\max} = 1+V$ et $E_{\min} = 1-V$.

$$\text{D'où } V = \text{sinc} \left(\frac{psl_0}{\lambda_0 f'_0} \right)$$

Application numérique:

$$\frac{psl_0}{\lambda_0 f'_0} = 0,666 \text{ d'où } V \gg 0,93.$$

(Typiquement, on prend pour critère visuel de bonne visibilité des franges $V_{\min} = 0,6$, ce qui est réalisé ici !).

IV. 1. c. L'étude précédente montre que la fente F de largeur 50 μm peut être considérée comme uniformément éclairée (on a une frange claire en $x = 0$) par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 .

Cette longueur d'onde est transmise sans déviation par le prisme à vision directe et on a vu qu'on pouvait négliger la diffraction par ce prisme (Q III. 2.).

Donc on observe sur F'x un éclairement monochromatique (longueur d'onde λ_0), quasi uniforme de largeur l_0 , centré sur F'.

IV. 2. a. La répartition d'éclairement au point M sur Fx est de la forme (du moins au voisinage de F: $E(x) = \frac{E(0)}{2} \left[1 + \cos\left(2p \frac{d(x)}{\lambda_0}\right) \right]$, où $\delta(x)$ est la différence de chemin optique:

$$\delta(x) = (F_0 F_2 M) - (F_0 F_1 M).$$

En l'absence de la lame, on avait: $d(x) = \frac{s \cdot x}{f_0}$. Le chemin optique supplémentaire induit par

la traversée de la lame s'écrit $n' \cdot e$, tandis que le rayon passant par F_2 parcourt la distance e dans l'air, d'indice pris égal à 1. Ainsi, avec la lame, on a $d(x) = (1 - n') \cdot e + \frac{s \cdot x}{f_0}$.

IV. 2. b. Si l'éclairement est nul sur F'x', c'est qu'on a en F (donc pour $x = 0$) une **frange noire**, vérifiant: $d(0) = (1 - n')e = (2p + 1) \frac{\lambda_0}{2}$, avec p entier. Soit encore: $\frac{n'-1}{0,01637} = 2p + 1$, p entier..

IV. 2. c. La source est maintenant **temporellement incohérente** et chaque composante spectrale donne sur Fx sa propre figure d'interférences, avec un interfrange $i(\lambda)$ dépendant de la longueur d'onde.

En $x = 0$, on obtient pour toute longueur d'onde une frange claire et compte tenu de la largeur de la fente F, on peut considérer qu'il y a superposition de toutes ces franges: sans brouillage (l'interfrange varie entre 160 μm pour $\lambda = 400 \text{ nm}$ et 320 μm pour $\lambda = 800 \text{ nm}$).

On observe donc en F une **frange blanche**, comportant toutes les longueurs d'onde du spectre visible.

Cette lumière polychromatique est ensuite décomposée par le prisme à vision directe, selon la caractéristique tracée à la question II. 3:

On observe sur F'x' le spectre de la lumière blanche, le rouge vers les x' positifs (vers + 5 à 6 mm) et le violet pour les x' négatifs (vers -14 à - 15 mm ?).

IV. 2. d. Les cannelures sur F'x' sont obtenues pour des longueurs d'ondes donnant une frange noire en F, ce qui est réalisé si (cf IV. 2. b.): $(1 - n') \cdot e = (2p_\lambda + 1) \frac{\lambda}{2}$, avec p_λ entier.

Remarquons que l'indice n' étant supérieur à 1,

l'entier p_λ est négatif.

Soit λ_1 la longueur d'onde correspondant à $x'_1 = -5,6 \text{ mm}$ et λ_2 la longueur d'onde correspondant à $x'_2 = +3,4 \text{ mm}$. Soit $p_1 + 1/2$ et $p_2 + 1/2$ les ordres

d'interférences de ces cannelures. L'énoncé nous précise qu'on obtient 3 cannelures entre λ_1 et λ_2 : donc on a une différence de 4 unités entre les deux ordres d'interférences.

En tenant compte des signes de p_1 et p_2 on obtient: $(p_1 + 1/2) = (p_2 + 1/2) - 4$.

On a donc à résoudre : $(1 - n') \cdot e = (p_1 + \frac{1}{2})\lambda_1 = (p_2 + \frac{1}{2})\lambda_2 = [(p_1 + \frac{1}{2}) + 4]\lambda_2$

d'où $p_1 + \frac{1}{2} = \frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et finalement: $n' = 1 + \frac{4\lambda_1\lambda_2}{e(\lambda_2 - \lambda_1)}$.

Sur la caractéristique (x'_i , λ_i), on lit:

$\{x_{\odot 1} = -5,6 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_1 = 495 \text{ nm} \quad x'_2 = +3,4 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_2 = 692 \text{ nm} \}$. D'où: $n' = 1,386$

Remarque: Compte tenu de l'incertitude due aux erreurs de pointés sur la caractéristique (quel lissage prendre ?), on peut retenir la valeur : $n' \approx 1,40$.

FIN DU PREMIER PROBLÈME.

DEUXIÈME PROBLÈME : ELECTRICITÉ.

1. Pendant la durée dt , circule à travers le dipôle la charge $dq = idt$, sous la ddp $v(t)$. Le travail électrique reçu par le dipôle est alors $\delta W_{el} = v(t).dq$, soit .

La puissance instantanée reçue par le dipôle est $p(t) = \delta W_{el}/dt$, soit .

2. Conventions de notation: dans toute la suite du problème, on notera:
 en minuscule $x(t)$, la valeur instantanée réelle,
 en minuscule soulignée $\underline{x}$, la grandeur complexe associée,
 en majuscule X , la valeur efficace de la grandeur sinusoïdale $x(t)$.

On a $p(t) = 2VI \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi)$.

On utilise l'identité : $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$. Ainsi $p(t) = VI[\cos(\phi) - \cos(2\omega t + \phi)]$.

Alors , car $\langle \cos(2\omega t + \phi) \rangle = 0$.

3. Avec les grandeurs complexes : $\underline{v} = \underline{Z}.i$, conduisant à $V.[\cos(\phi) + j\sin(\phi)] = (R + jX)I$.

On égale les parties réelles et imaginaires: et . Ainsi .

4. On a $v_q = -V\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$. En utilisant l'identité: $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$,

il vient: $Q = \langle VI[\sin(\phi) - \sin(2\omega t + \phi)] \rangle$.

D'où , car $\langle \sin(2\omega t + \phi) \rangle = 0$. Soit encore .

5. En écrivant $\underline{i} = \underline{Y}.\underline{v}$, il vient $I = V.[\cos(\phi) + j\sin(\phi)].(G + jB)$.

On égale les parties réelles et imaginaires: et .

D'où $P = VI \cos(\phi) = V^2[G \cos^2(\phi) - B \sin(\phi) \cos(\phi)] = GV^2 [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)]$. soit .

et $Q = VI \sin(\phi) = V^2[G \sin(\phi) \cos(\phi) - B \sin^2(\phi)] = -BV^2 [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)]$. soit .

6. 1. On suppose les deux dipôles séries énergétiquement équivalents.

Alors, on a: $R_1 I_1^2 = R_2 I_2^2$, avec R_1 et R_2 positifs.

$X_1 I_1^2 = X_2 I_2^2$, ce qui montre que X_1 et X_2 sont nécessairement de **même signe**.

et $V_1 = V_2$ soit $|\underline{Z}_1| I_1 = |\underline{Z}_2| I_2$.

En éliminant les intensités I_1 et I_2 , on obtient : $\frac{R_1}{X_1} = \frac{R_2}{X_2}$ (1) et $\frac{R_1^2 + X_1^2}{R_1} = \frac{R_2^2 + X_2^2}{R_2}$ (2).

On développe (2) et on tient compte de (1) : $R_1^2 R_2 + X_1^2 R_2 = R_1 R_2^2 + R_1 X_2^2 = R_1 R_2^2 + R_2 X_1 X_2$.

Soit en factorisant : $(R_1 - R_2) \cdot (R_1 R_2 + X_1 X_2) = 0$.

Le deuxième facteur est toujours positif (cf ci-dessus), il reste: . De (1), on tire

Conclusion: Deux dipôles séries énergétiquement équivalents ont même impédance complexe.

6. 2. On suppose que les deux dipôles ci-dessous sont énergétiquement équivalents. Alors:

$$R.I_1^2 = G.V_2^2, \quad X.I_1^2 = -B.V_2^2,$$

et on a $V_2 = V_1 = |\underline{Z}|.I_1$.

$$\text{Ainsi : } R.I_1^2 = G.(R^2 + X^2).I_1^2,$$

$$X.I_1^2 = -B.(R^2 + X^2).I_1^2.$$

$$\text{D'où : } G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ et } B = \frac{-X}{R^2 + X^2}.$$

Relation entre $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$?

$$\text{On a } \underline{Y} = G + jB = \frac{R-jX}{R^2+X^2}. \quad \text{Soit } \underline{Y} = \frac{\underline{Z}^*}{|\underline{Z}|^2}, \text{ où } \underline{Z}^* \text{ est le } \underline{\text{complexe conjugué}} \text{ de } \underline{Z}.$$

7. On donne V, P et Q. D'après la question 5, on a $G = \frac{P}{V^2}$ et $B = -\frac{Q}{V^2}.$

Soit numériquement: et .
 On a $P = \frac{RV^2}{R^2+X^2}$ et $Q = \frac{XV^2}{R^2+X^2}$. D'où $P^2 + Q^2 = \frac{V^4}{R^2+X^2}.$

Ainsi : $R = \frac{PV^2}{P^2+Q^2}$ et $X = \frac{QV^2}{P^2+Q^2}$. Application numérique: et .

Soit ϕ le déphasage de $v(t)$ par rapport à $i(t)$. De $P = VI\cos(\phi)$ et $Q = VI\sin(\phi)$, on tire :

$$\tan \phi = \frac{Q}{P}, \text{ avec ici } \phi \in [0 ; \pi/2] \text{ car } Q > 0. \text{ Application numérique:}.$$

8. Pour une inductance pure ;. Pour un condensateur : :

9. $v(t)$ est en retard de $\pi/2$ sur i_C , est en avance de $\pi/2$ sur i_B
 (car $B < 0$) et est en phase avec i_G .

En raisonnant avec les grandeurs complexes, on a : $\underline{i}_L = \underline{i}_C + \underline{i}_G + \underline{i}_B.$

Entre les valeurs efficaces, on a les relations suivantes:

$$I_B = |B|.V; \quad I_C = C\omega V; \quad I_G = GV.$$

Soit ϕ' le déphasage de $v(t)$ sur $i_L(t)$. Prenons le courant $i_L(t)$ comme origine des phases. Le diagramme de Fresnel a l'allure suivante:

En

raisonnant dans le triangle (mno), rectangle en n, on a $\tan(|\phi'|) = no/mn.$

Or, $mn = I_G = GV$ et $no = |I_B - I_C| = ||B| - C|V (= (|B| - C)V \text{ si } \phi' > 0 \text{ et } = (C - |B|)V \text{ si } \phi' < 0).$

Ainsi $\tan \phi' = \frac{|B|-C\omega}{G}$ ou $C = \frac{|B|-G\tan \phi'}{\omega}$: cette expression regroupe les deux cas $\phi' > 0$ ou < 0 .

Application numérique : $\omega = 2\pi f = 100. \pi \text{ rad/s}$; $B = -0,112 \text{ usi}$; $G = 0,06494 \text{ usi}.$

Pour $\phi'_0 = +15^\circ$; Pour $\phi'_0 = -15^\circ$.

Valeur efficace de i_L .

Avec les grandeurs complexes : $\dot{I}_L = [G + j(B + C\omega)] \cdot \underline{V}$.

Donc en valeur efficace : $I_L = \sqrt{G^2 + (B + C\omega)^2} \cdot V$, soit aussi:

$$I_L = \sqrt{1 + \tan^2 j'}. VG = \frac{VG}{\cos j'}.$$

Application numérique : .

Remarque: on pouvait également mener l'étude en utilisant le théorème de Boucherot :

La puissance active totale dissipée dans le condensateur et le dipôle (d) est : $P_{\text{tot}} = V \cdot I_L \cos(\phi')$.

Le théorème de Boucherot permet d'écrire $P_{\text{tot}} = P_C + P_G + P_B = 0 + GV^2 + 0$. D'où $I_L = \frac{GV}{\cos j'}$.

10. 1. $p(t) = v(t) \cdot i(t) = 2V \sin(\omega t + \phi) \cdot \{ I_1 \sin(\omega t) - I_5 \sin(5\omega t) - I_7 \sin(7\omega t) \}$

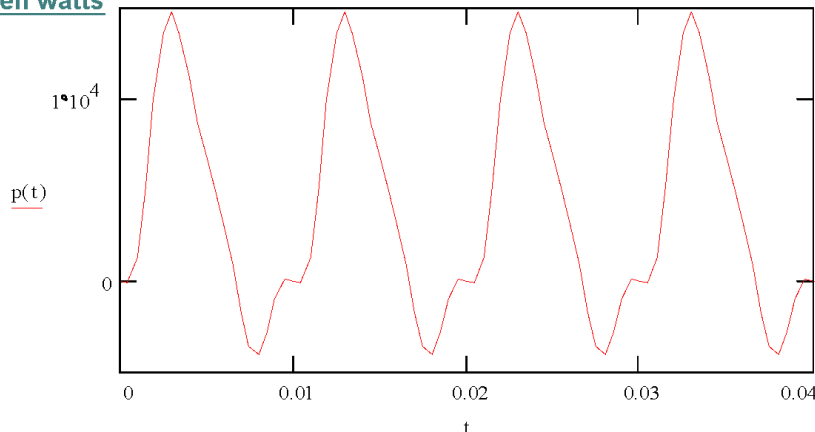
On développe comme précédemment les produits de sinus, conduisant à l'expression :

$$p(t) = VI_1 \cos(\phi) - VI_1 \cos(2\omega t + \phi) + VI_5 \cos(4\omega t - \phi) - VI_5 \cos(6\omega t + \phi) + VI_7 \cos(6\omega t - \phi) - VI_7 \cos(8\omega t + \phi).$$

La fonction $t \rightarrow p(t)$ est périodique de **période T/2** (contient des termes multiples de $2\omega t$).

Allure du graphe p(t): on teste les possesseurs de calculatrices graphiques !

p(t) en watts



temps (en s)

10. 2. $P = \langle p(t) \rangle_{\text{temp}}$. Soit , les contributions des autres termes étant nulles.

Application numérique : $V_1 = 231 \text{ V}$; $I_1 = 35 \text{ A}$; $\phi = 60^\circ$; alors .

10. 3. On a $Q = \frac{1}{T} \int_0^T -2V \cos(\omega t + j) \cdot \{ I_1 \sin(\omega t) - I_5 \sin(5\omega t) - I_7 \sin(7\omega t) \} dt$.

On développe $\cos(a)\sin(b) = -\frac{1}{2} \{ \sin(a-b) - \sin(a+b) \}$. En passant aux valeurs moyennes, il reste:

Application numérique : $V_1 = 231 \text{ V}$; $I_1 = 35 \text{ A}$; $\phi = 60^\circ$; alors .

10. 4. Par définition de la valeur efficace : $I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle}$.

On développe $i^2(t)$ et on exploite le fait que: $\langle \sin(m\omega t) \cdot \sin(n\omega t) \rangle = 0$ si $m \neq n$ et $\frac{1}{2}$ si $m = n$.

Alors, il reste : $I_{eff} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2}$. **Application numérique :**

10. 5. On a $i_L(t) = i_C(t) + i(t)$, avec $i_C(t) = C' \frac{dv}{dt} = C'w\sqrt{2}\cos(wt + j)$.

Ainsi : $i_L(t) = I_1\sqrt{2}\sin(wt) + C'w\sqrt{2}\cos(wt + j) - I_5\sqrt{2}\sin(5wt) - I_7\sqrt{2}\sin(7wt)$.

$(I_L)_{eff} = \sqrt{\langle i_L^2(t) \rangle}$. Or $\langle \sin^2(nwt) \rangle = \langle \cos^2(wt + \phi) \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \sin(wt) \cdot \cos(wt + \phi) \rangle = -\frac{1}{2}$

$\sin\phi$.

D'où $(I_L)_{eff} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + (C'wV)^2 - 2C'wVI_1\sin j}$.

On veut $(I_L)_{eff}$ minimal (ou $(I_L^2)_{eff}$ minimal, soit $\frac{\partial (I_L^2)_{eff}}{\partial C'} = 0$, obtenu pour C' t.q. :

(Penser à vérifier qu'on obtient bien un minimum pour $(I_L)_{eff}$).

Application numérique : Et $\{(I_L)_{eff}\}_{min} = \sqrt{I_1^2 \cos^2 j + I_5^2 + I_7^2}$ soit $I_{Lmin} = 18,9 \text{ A}$.

11. 1. Pour chaque dipôle, le déphasage entre v_k et i_k vaut ϕ . Donc.

Application numérique : $V = 231 \text{ V}$; $I_1 = 35 \text{ A}$; $\cos\phi = 0,866$;

11. 2. On a $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3$

En développant comme précédemment les produits de sinus, il vient:

$$p(t) = 3VI\cos j - VI\{\cos(2wt + j) + \cos(2wt + 2q + j) + \cos(2wt + 2y + j)\}$$

Par identification, on trouve:

et

$$F(t) = -VI\{\cos(2wt + j) + \cos(2wt + 2q + j) + \cos(2wt + 2y + j)\}.$$

On veut $F(t)$ identiquement nulle pour tout t .

En particulier, pour t tel que $2wt + \phi = 0 [2\pi]$, il vient: $1 + \cos(2\theta) + \cos(2\psi) = 0$, soit encore:

relation (1).

Pour t tel que $2wt + \phi = \pi/2 [2\pi]$, il reste: $\sin(2\theta) + \sin(2\psi) = 0$, ou encore:

relation (2).

Choisissons de prendre θ et ψ dans l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$. Alors $(\theta + \psi)$ et $(\theta - \psi) \in [-2\pi ; +2\pi]$.

La prise en compte des relations (1) et (2) impose : $\sin(\theta + \psi) = 0$ et $\cos(\theta - \psi) = \pm \frac{1}{2}$, soit aussi:

$$\{q + y = 0 \cos(2q) = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \{q + y = p \cos(2q) = -\frac{1}{2},$$

conduisant aux jeux de solutions possibles:

$$(1)\{q = \frac{p}{3} y = -\frac{p}{3} \quad (2)\{q = -\frac{p}{3} y = \frac{p}{3} \quad (3)\{q = \frac{2p}{3} y = -\frac{2p}{3} \quad (4)\{q = -\frac{2p}{3} y = \frac{2p}{3} \quad (5)\{q = -\frac{p}{3} y = \frac{4p}{3} \quad (6)\{q = \frac{p}{3} y = \frac{2p}{3} \quad (7)\{q = -\frac{2p}{3} y = \frac{p}{3} \quad (8)\{q = \frac{2p}{3} y = \frac{p}{3}.$$

Remarque: Le triphasé équilibré correspond aux solutions (3) ou (4).

Fin du deuxième problème et de l'épreuve.