

**מתכונת במתמטיקה-שאלון 581**

לפניך שאלון הכולל 8 שאלות

עליך לענות על 5 שאלות

לפחות שאלה אחת מכל פרק.

ערך כל שאלה 20 נקודות.

**פרק ראשון-אלגברה והסתברות**

1. ענת ואורלי יצאו בשעה 8:00 מנקודה A ורכבו על אופניים יחד, לעבר נקודה B. לאחר שעברו מרחק המהווה 60% מן המרחק שעדיין נותר להן עד לנקודה B, חלה תקלה באופניים של אורלי והיא נאלצה לעצור. ענת המשיכה לרכב עד לנקודה B וחזרה מיד לעבר הנקודה A. לאחר עצירה של שעה, הצליחה אורלי לתקן את התקלה באופניה, והמשיכה לרכב לעבר הנקודה B באותה המהירות בה רכבה לפני התקלה. היא פגשה את ענת בשעה 11:30 (שהייתה בדרכה חזרה מנקודה B) במרחק 22 ק"מ מן המקום בו נעצרה.
1. מצאי את מהירות רכיבתן של אורלי ושל ענת.
2. באיזה מרחק מנקודה B הייתה ענת ברגע בו הצליחה אורלי לתקן את אופניה ולהמשיך בדרכה?

257

[illegible]

2. בסדרה חשבונית יש  $2n + 1$  איברים. סכום  $n + 1$  האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה. נתון שהאיבר הראשון הוא שלילי.

1. (1) מצאי את האיבר  $a_{n+1}$ .

(2) קבעי האם הסדרה עולה או יורדת. נמקי.

ב. חשבי את הסכום של  $2n + 1$  האיברים של הסדרה.

ג. לכל איבר בסדרה הנתונה הוסיפו את המספר המציין את מקומו בסדרה (לאיבר

הראשון הוסיפו 1, לאיבר השני הוסיפו 2 וכו').

הסכום של הסדרה החדשה גדול ב- 1891 מהסכום של הסדרה הנתונה.

מצאי את מספר האיברים בסדרה.

$N = 2n+1$   
 ③  $S_{n+1} = S_n$        $S_n + a_{n+1} = S_n$   
 $a_{n+1} = 0$   
 ②  $a_n < 0$        $a_{n+1} = 0$   
 סדרה חשבונית שהאיבר הכללי שלה הוא  $a_n$        $a_{n+1} = 0$   
 ④  $S_{2n+1} = \frac{2n+1}{2} [2a_1 + (2n+1-1)d] =$   
 $= \frac{2n+1}{2} [2a_1 + 2nd] = (2n+1)(a_1 + nd) = (2n+1) \cdot 0 = 0$   
 $a_{n+1} = a_1 + nd = 0$   
 ⑤  $a_1+1, a_2+2, a_3+3, \dots, a_{2n+1}+2n+1$   
 $a_1+1+a_2+2+a_3+3+\dots+a_{2n+1}+2n+1 = 0+1891$   
 ④  $(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2n+1}) + (1+2+3+\dots+2n+1) = 1891$   
 $0 + 1+2+3+\dots+2n+1 = 1891$   
 $\frac{2n+1}{2} [1+2n+1] = 1891$        $a_1 = 1$   
 $\frac{2n+1}{2} [2n+2] = 1891$        $d = 1$   
 $(2n+1)(n+1) = 1891$        $N = 2n+1$   
 $2n^2 + 2n + 1 + 1 - 1891 = 0$

3. במסיבת יום הולדת של ילדי גן נערכה תחרות נושאת פרסים. ילד שזוכה בפרס מוציא באופן מקרי חטיף מקופסה שבה יש  $n$  חטיפים: 5 מהם חטיפי שוקולד והשאר חטיפי אגוזים. ליאת, ליהי ואור זכו בפרס וכל אחד מהם הוציא חטיף מהקופסה. ליאת וליהי מעדיפות חטיף שוקולד. ההסתברות שלפחות אחת מהן הוציאה חטיף שוקולד היא:  $\frac{15}{22}$ .

1. מצאי את  $n$ .

- (2) מה ההסתברות ששלושת הילדים ליאת, ליהי ואור קיבלו חטיף שוקולד?
- (3) מה ההסתברות שלפחות שניים מבין שלושת הילדים קיבלו חטיף שוקולד?
- (4) ידוע שלפחות שניים מבין שלושת הילדים קיבלו חטיף שוקולד. מה ההסתברות שנוגה לא קיבלה חטיף שוקולד?

2. באותה מסיבה נערכה תחרות נוספת. שלושה משתתפים זכו בפרס. גם הפעם הפרסים הוגרלו מקופסה שבה 10 חטיפים, (ה- חשמצאת בסעיף א') חלקם שוקולד וחלקם אגוזים, אך הפעם היו בקופסה 6 חטיפי שוקולד.
- פי כמה גדלה כעת ההסתברות שהפעם כל אחד משלושת הזוכים קיבל חטיף שוקולד?

307

3] A - חטיף שוקולד  
B - חטיף אגוזים

(1)  $P(A) = \frac{5}{12}$   
 $P(B) = \frac{7}{12}$

$1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{15}{22}$

$\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)} = \frac{7}{22}$

(3)  $22(n^2 - 6n - 5n + 30) = 7n(n-1)$   
 $22n^2 - 132n - 110n + 660 = 7n^2 - 7n$   
 $15n^2 - 235n + 660 = 0$   
 $n = \frac{11}{3}$   
 $n = 12$

(2)  $P(\frac{1}{2} \text{ שוקולד}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$

$P(A) = \frac{5}{12}$   
 $P(B) = \frac{7}{12}$

(3)  $P(\frac{2}{3} \text{ שוקולד}) = P(\frac{1}{2} \text{ שוקולד}) + P(\frac{2}{3} \text{ אגוזים}) = \frac{1}{22} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{4}{11}$

(4)  $P(\frac{1}{3} \text{ שוקולד} / \frac{2}{3} \text{ אגוזים}) = \frac{P(\frac{1}{3} \text{ שוקולד} \cap \frac{2}{3} \text{ אגוזים})}{P(\frac{2}{3} \text{ אגוזים})} = \frac{\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{4}{11}} = \frac{7}{24}$

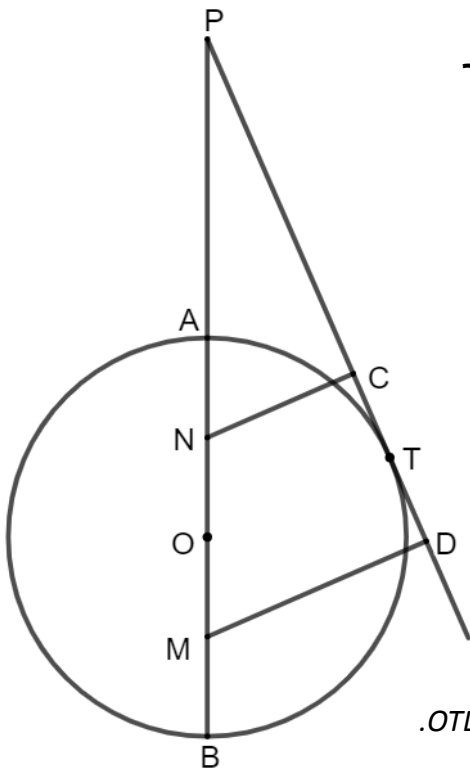
$P(\frac{1}{3} \text{ שוקולד}) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{11}$

$P(\frac{1}{3} \text{ שוקולד}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$

$\frac{1/11}{1/22} = 2$

2 - פי 2

## פרק שני-גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4.  $PT$  משיק למעגל  $O$  בנקודה  $T$ .  $PB$  עובר דרך מרכז המעגל.

הנקודה  $N$  היא אמצע הרדיוס  $AO$

והנקודה  $M$  היא אמצע הרדיוס  $OB$ . (ראי ציור).

נתון:  $AP = 1.5R$  כאשר  $R$  הוא רדיוס המעגל  $O$ .

$$MD \parallel NC, \quad NC \perp PT$$

1. בטאי את  $PT$  באמצעות  $R$ .

$$NC + MD = 2R$$

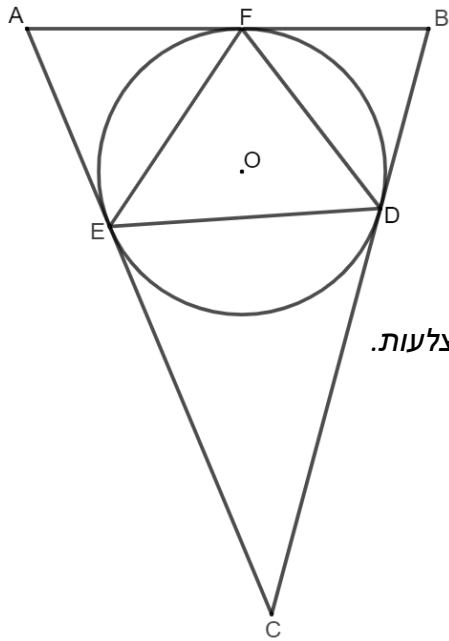
ב. 1) בטאי בעזרת  $R$  את אורכי הקטעים  $NC$  ו- $MD$ .

2) חשבי את היחס בין שטח המרובע  $NCTO$  לבין שטח המרובע  $OTDM$ .

$$R = 10 \text{ ס"מ}$$

חשבי את שטח המשולש  $\triangle PMD$


$$N C = 0.8 R$$



5. במשולש  $ABC$  חסום מעגל  $O$ .  $D, E, F$  הן נקודות ההשקה.

נסמן:  $t = CD$ ,  $\angle EDC = \alpha$ ,  $\angle FED = 50^\circ$  ( $\alpha$  היא זווית חדה)

1.1 הביעי את אורך הקטע  $ED$  באמצעות  $t$  ו- $\alpha$ .

2) הביעי את אורך הקטע  $EF$  באמצעות  $t$  ו- $\alpha$ .

ב. נתון:  $\frac{EF}{ED} = 0.9216$  הוכיחי שהמשולש  $AEF$  הוא משולש שווה צלעות.

ג. נתון:  $t = 10$  ס"מ

הוכיחי: 24 ס"מ.  $CF = 14$



## פרק שלישי- חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש,

### פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות

$$6. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{\sqrt{ax^2-4}}{ax-b}$$

1. הישר  $y = 1$  הוא האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .  $(a, b > 0)$ .

3 האסימפטוטות של גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר הע יוצרים ברביע הראשון מלבן

ששטחו 14 יח"ר. מצאי את הפרמטרים  $b$  ו  $a$ .

שימי לב!!! עבור הסעיפים הבאים התעלמי מהנתונים בסעיף א' והציבי:

$$a = 1 \quad b = 7$$

2. עבור הפונקציה  $f(x)$  מצאו:

(1) תחום ההגדרה.

(2) נקודות קיצון וסוגן. (אם יש כאלה)

(3) נקודות חיתוך עם הצירים. (אם יש כאלה)

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

3. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

4. נתונה פונקציה חדשה:  $g(x) = -|f(x + 1)|$

(1) שרטטו את גרף הפונקציה  $g(x)$  במערכת צירים חדשה. נמקו

(2) עבור איזה ערך של  $t$  הביטוי:  $\int_{-8}^t g(x)dx$   $(-8 \leq t \leq -3)$

יהיה מינימלי?

(3) נתון שלמשוואה:  $g(x) = m$  יש פתרון יחיד. מצאי את ערכו של  $m$ .

Q10  $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2-4}}{ax-b}$

$a, b > 0$

$y = 1/\sqrt{2}$

אנליזה

$ax-b=0$

$ax=b$

$x=b/a$

אנליזה

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{ax^2-4}}{ax-b} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\sqrt{ax^2-4}}{x}}{\frac{ax}{x} - \frac{b}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm \sqrt{\frac{ax^2-4}{x^2}}}{a - \frac{b}{x}} =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm \sqrt{a - \frac{4}{x^2}}}{a - \frac{b}{x}} = \frac{\pm \sqrt{a-0}}{a-0} \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{a} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} = a$

$2a = a^2$

$a^2 - 2a = 0$

$a(a-2) = 0$

$a=0$   $a=2$   
פירוש

$\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$b = 8\sqrt{2}$

Q2  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-7}$

(1) נגזרת ראשונית

$x^2-4 \geq 0 \wedge x-7 \neq 0$

$x \leq -2 \quad x \geq 2 \quad x \neq 7$

$x \leq -2, 2 \leq x < 7, x > 7$

(2) נגזרת שנייה

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}(x-7) - \sqrt{x^2-4} \cdot 1}{(x-7)^2}$

$f'(x) = \frac{x(x-7) - (x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}(x-7)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2-7x-x^2+4}{\sqrt{x^2-4}(x-7)^2}$

$f'(x) = \frac{4-7x}{\sqrt{x^2-4}(x-7)^2}$

$f'(x) = 0$

$4-7x=0$

$x = 4/7$

נגזרת ראשונית

אנליזה נגזרת ראשונית

$x < -2$

$x = 2$

$y = 0$

$y = 0$

$f(x) > 0$

$f'(x) < 0$

$f'(x) < 0$

| x       | $x < -2$ | $x = -2$ | $-2 < x < 2$ | $x = 2$ | $2 < x < 7$ | $x = 7$ | $x > 7$ |
|---------|----------|----------|--------------|---------|-------------|---------|---------|
| $f(x)$  | +        |          |              |         | -           |         | -       |
| $f'(x)$ | ↗        |          |              |         | ↘           |         | ↘       |

$(-2, 0) \text{ MAX}$

$(2, 0) \text{ MAX}$

אנליזה נגזרת שנייה

$\sqrt{x^2-4} = 0$

$x = -2 \quad x = 2$

$(-2, 0) \quad (2, 0)$

אנליזה נגזרת שנייה

אנליזה נגזרת שנייה  $x=0$

$y$  נגזרת שנייה נגזרת ראשונית

אנליזה נגזרת שנייה

$x=7$

אנליזה נגזרת שנייה

אנליזה נגזרת שנייה:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 - \frac{7}{x}} =$

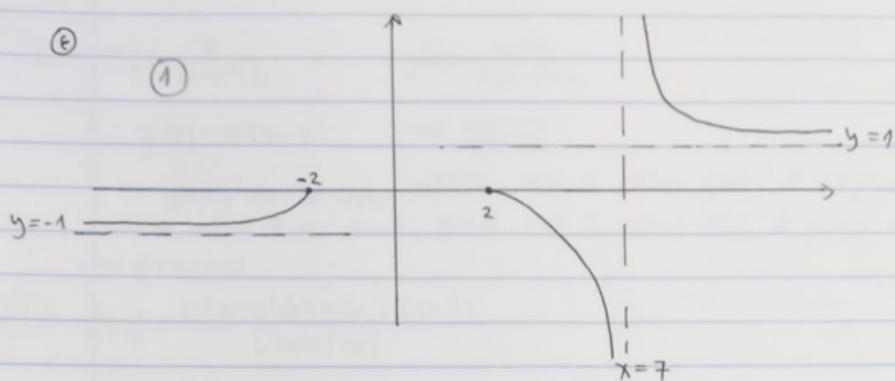
$= \frac{\pm \sqrt{1}}{1} \rightarrow 1$   
 $\rightarrow -1$

$y=1$

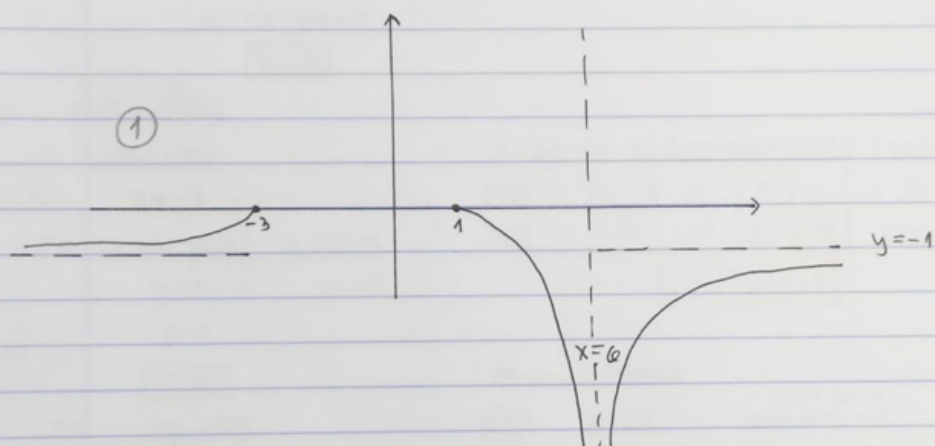
$y=-1$

$x \rightarrow \infty$

$x \rightarrow -\infty$



⓫)  $g(x) = -|f(x+1)|$



(2)  $\int_{-8}^t g(x) dx$   $-8 \leq t \leq -3 \Rightarrow \boxed{t = -3}$  ⓫

כי ככל ש- $t$  גדל, המעבר עובר מנקודה שלילית למחצית חיובית ולכן ה- $\min$  יתקבל בקצה השלילי.

(3)  $g(x) = M$  : פיתרון חז' :  
 $M = -1$  : נקודה שלילית ⓫

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{(x+4)^2+b}$  הפונקציה:  $g(x) = \frac{x-7}{a(x-3)^2+b}$

התקבלה מהזזה אופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה  $g(x)$  נמצאת על הישר  $x = 11$ .

1. מצאי את  $a$  ו- $b$ .

2. עבור הפונקציה  $f(x)$  מצאי את:

(1) תחום ההגדרה.

(2) שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

(3) שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

(4) האסימפטוטות המקבילות לצירים.

3. שרטטי את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

4. נתונה הפונקציה:  $h(x) = -f(-x)$ ,  $n$  הוא מספר טבעי.

קבעי איזו מהטענות הבאות היא נכונה והסבירי מדוע:

$$-\int_0^n f(x)dx < \int_{-n}^0 h(x)dx \quad (1)$$

$$-\int_0^n f(x)dx = \int_{-n}^0 h(x)dx \quad (2)$$

$$-\int_0^n f(x)dx > \int_{-n}^0 h(x)dx \quad (3)$$

5. נתונה הפונקציה:  $t(x) = f(x) \cdot \frac{x^2-k^2}{x^2-k^2}$

האם קיים ערך  $k$  שבעבורו גרף הפונקציה  $t(x)$  זהה לגרף הפונקציה  $f(x)$ ?

נמקי.

$$\textcircled{7} f(x) = \frac{x}{(x+4)^2 + b}$$

$$g(x) = \frac{x-7}{a(x-3)^2 + b}$$

$$g(x) = f(x-7) \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$(g(x) = f(x-7) \Rightarrow \text{הפונקציה } g(x) \text{ היא הפונקציה } f(x) \text{ שזוזת 7 יחידות שמאלה})$   
 $x=11$  זהו הנקודה המקסימלית של  $g(x)$   $\Rightarrow$  הנקודה המקסימלית של  $f(x)$  היא ב- $x=4$   
 $\Rightarrow f'(4) = 0$

$$\textcircled{3} f'(x) = \frac{1 \cdot ((x+4)^2 + b) - x \cdot 2(x+4)}{((x+4)^2 + b)^2}$$

$$f'(4) = \frac{64+b-8 \cdot 8}{(64+b)^2} = 0$$

$$64+b-64=0$$

$$\boxed{b=0}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x}{(x+4)^2}$$

(1) : נמצא נקודות קיצון

$$\textcircled{0.5} \quad x+4$$

$$(2) : x \text{ זוגי } y \text{ זוגי}$$

$$y=0 \quad (0,0)$$

$$x=0$$

$$\boxed{(0,0)}$$

(3) : נגזרת

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+4)^2 - x \cdot 2(x+4)}{(x+4)^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 8x + 16 - 2x^2 - 8x}{(x+4)^4}$$

$$\textcircled{1} f'(x) = \frac{16-x^2}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = -4$$

$$x = 4$$

$$y = 1/16$$

| x     | x < -4 | x = -4 | -4 < x < 4 | x = 4 | x > 4 |            |
|-------|--------|--------|------------|-------|-------|------------|
| f'(x) | -      |        | +          | 0     | -     | f'(-5) < 0 |
| f(x)  | ↗      |        | ↗          | Max   | ↘     | f'(5) < 0  |

$$\boxed{(4, 1/16) \text{ MAX}}$$

(4) : נגזרת

$$\textcircled{0.5} \quad x = -4$$

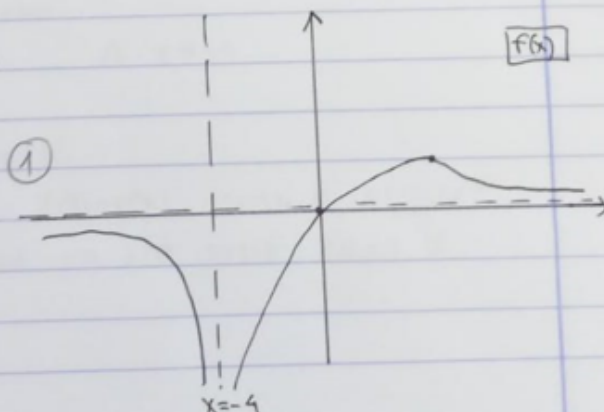
נגזרת

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2 + 8x + 16} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\textcircled{0.5}$$

$$\boxed{y=0}$$

(E)



8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin \sin x - (\sin \sin x)^2}{x}$  בתחום:  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

1. הראי שהפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בכל התחום הנתון.
2. נתון שגרף הנגזרת  $f'(x)$  חותך את ציר ה- $x$  רק בקצה הימני של התחום הנתון. מבלי לבצע גזירה כלשהי, מצאי את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

3. שרטטי סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון, בהינתן שבתחום זה הנגזרת השנייה חיובית.

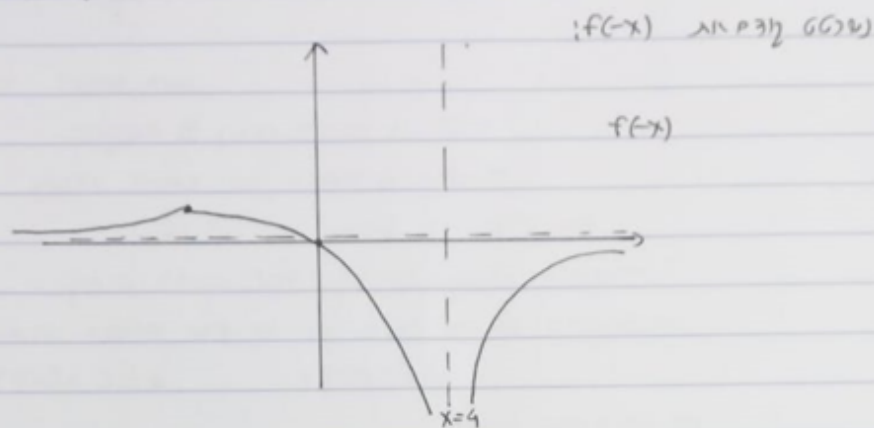
4. מהנקודה  $A$  הנמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון מורידים אנכים לצירים, אשר חותכים את הצירים בנקודות  $C$  ו- $B$ .  
(1) מצאי את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$ , עבורו שטח המשולש  $\Delta ABC$  הוא מקסימלי.

- (2) חשבי את השטח המקסימלי של המשולש  $\Delta ABC$ .

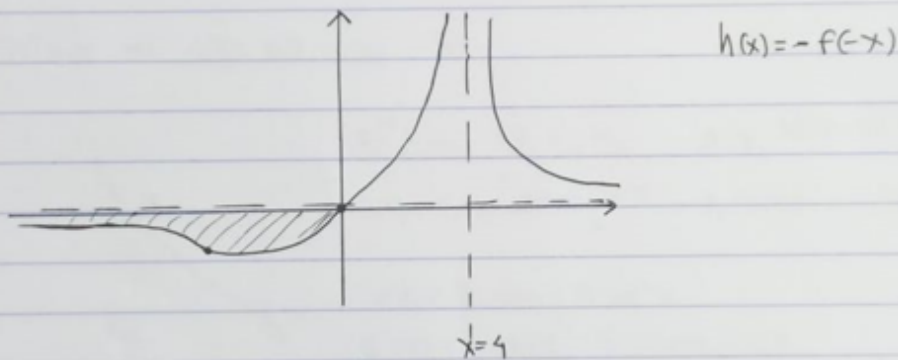
5. נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{(\sin \sin x)^2 - \sin \sin x}{x}$  בתחום:  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

- (3) מהנקודה  $D$  הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון מורידים אנכים לצירים, אשר חותכים את הצירים בנקודות  $E$  ו- $F$ . מבלי לבצע גזירה כלשהי, קבעי מהו את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $D$ , שבעבורה שטח המשולש  $\Delta DEF$  הוא מקסימלי. הסבירי את תשובתך.

3)  $h(x) = -f(-x)$



2



שאלה 2) (כיוון הפונקציה) הפונקציה - הפונקציה

1)  $t(x) = f(x) \cdot \frac{x^2 - K^2}{x^2 + K^2}$

$t(x)$  גורם הציבה

$x^2 - K^2 \neq 0 \quad \cap \quad x \neq -4$

$x^2 + K^2$

$x \neq -K \quad x \neq K$

$t(x) = f(x)$  כאשר  $K$  משקל

כי הגורם הציבה שונה בין הפונקציות.

בהצלחה 😊

6. מעגל ששטחו  $\pi$  יח"ר משיק לשתי האסימפטוטות האופקיות

$$\text{של הפונקציה: } f(x) = \frac{\sqrt{ax^2-4}}{x-a}$$

1. מצאי את  $a$

2. עבור הפונקציה  $f(x)$  מצאי את:

(1) תחום הגדרה.

(2) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

(3) שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

(4) האסימפטוטות המקבילות לצירים.

3. שרטטי סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

4. קבעי איזה מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה ונמקי את תשובתך.

$$(1) f(-10^{20}) < -f(10^{20})$$

$$(2) f(-10^{20}) = -f(10^{20})$$

$$(3) f(-10^{20}) > -f(10^{20})$$

5. נתונה הפונקציה:  $g(x) = [f(x)]^n$  ( $n$  מספר טבעי)

מצאי את תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$ . הבחינו בין ערכי  $n$  השונים והסבירו את תשובתך.