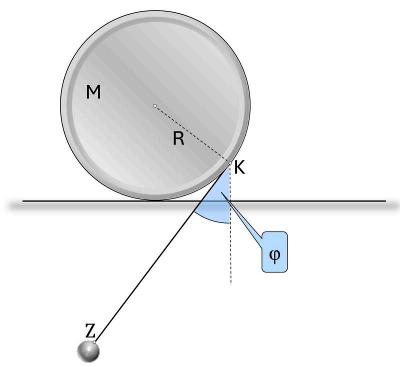
Ο συμπαγής και ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα $M = 8\ Kg$ και ακτίνα $R = 0,5\ m$. Στην περιφέρειά του έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος δύο άκαμπτων παράλληλων οριζόντιων ράβδων που έχουν ανάμεσα τους το κατάλληλο περιθώριο ώστε να περνά το νήμα στη άκρη Z του οποίου συνδεθεί σφαίρα αμελητέας ακτίνας, μάζας $m = 45\ Kg$.



Αρχικά, το σύστημα συγκρατείται ακίνητο με το νήμα τεντωμένο να σχηματίζει γωνία φ $(ημφ = 0,6\ και\ συνφ = 0,8)$ με την κατακόρυφο.

Κάποια στιγμή το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ενώ παρατηρείται ότι, το νήμα ξετυλίγεται διατηρώντας συνεχώς την ίδια σταθερή γωνία με την κατακόρυφο καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.

Δ1

Να γράψετε τις εξισώσεις που συνδέουν τα μέτρα της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας της επιτάχυνσης της μικρής σφαίρας (a_{Zx} και a_{Zy}) με το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου (a_{cm}).

Δ2

Να δείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έχει μέτρο $\left|a_{cm}\right| = 7,5\ m/s^2$ και να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης $\vec{T}$ του νήματος.

(Δίνεται $g = 10\ m/s^2$)

Δ3

Να υπολογίσετε το μέτρο και τη φορά της στατικής τριβής T_s που δέχεται ο κύλινδρος από τις ράβδους κατά την κίνησή του.

Δ4

Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής $\left(\frac{dL}{dt}\right)$ του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του.

Δ5

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s$ μετά την απελευθέρωση του συστήματος, να υπολογίσετε για την κρεμάμενη σφαίρα:

α) Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής της δυναμικής ενέργειας $\left(\frac{dU}{dt}\right)$.

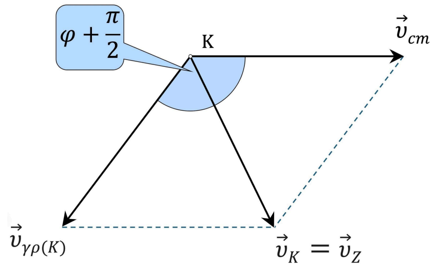
β) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\left(\frac{dK}{dt}\right)$.

γ) Την ισχύ της δύναμης (τάσης) του νήματος (P_T) που ασκείται στη σφαίρα, και να επιβεβαιώσετε αριθμητικά ότι ικανοποιείται η σχέση: $\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} + P_T$.

Λύση

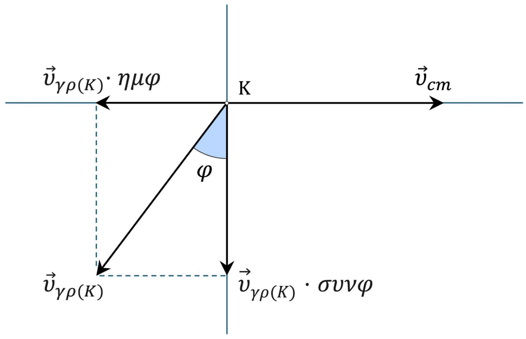
Δ1

Κατά την κίνηση του συστήματος η διεύθυνση του νήματος είναι σταθερή οπότε, οι ταχύτητες των δύο άκρων του νήματος ίσες:



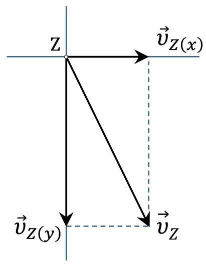
$\vec{\upsilon}_K = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho(K)} = \vec{\upsilon}_Z$

Λόγω της κύλισης που εκτελεί ο κύλινδρος, οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho(K)}$ έχουν ίσα μέτρα:



$$\left|\upsilon_{cm}\right| = \left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right| = \omega \bullet R$$

- Στον άξονα x (θετική φορά προς τα δεξιά):



$\upsilon_{Zx} = \left|\upsilon_{cm}\right| - \left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right| \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$
$\upsilon_{Zx} = \left|\upsilon_{cm}\right| - \left|\upsilon_{cm}\right| \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$
$\frac{d\upsilon_{Zx}}{dt} = \frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt} - \frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt} \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$
$a_{Zx} = \left|a_{cm}\right| - \left|a_{cm}\right| \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$
$a_{Zx} = \left|a_{cm}\right| \cdot (1 - 0,6) \Rightarrow$
$a_{Zx} = 0,4 \cdot \left|a_{cm}\right|$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{a}_{Zx}$ βγήκε θετική, δηλαδή η φορά της είναι προς τα δεξιά.

- Στον άξονα y (θετική φορά προς τα κάτω):

$\upsilon_{Zy} = \left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$
$\upsilon_{Zy} = \left|\upsilon_{cm}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$
$\frac{d\upsilon_{Zy}}{dt} = \frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow a_{Zy} = \left|a_{cm}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow a_{Zy} = \left|a_{cm}\right| \cdot 0,8$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{a}_{Zy}$ βγήκε θετική, δηλαδή η φορά της είναι προς τα κάτω.

Δ2

Οι δύο τάσεις που ασκεί το νήμα είναι αντίθετες διότι είναι αβαρές. Η τάση του νήματος $\vec{T}$ τραβάει την σφαίρα πλάγια (δεξιά και πάνω).

- Στον x:

$\Sigma F_x = m \cdot a_{Zx} \Rightarrow$

$|T| \cdot ημφ = m \cdot 0,4 \cdot a_{cm} \Rightarrow$

$|T| \cdot 0,6 = m \cdot 0,4 \cdot a_{cm} \Rightarrow$

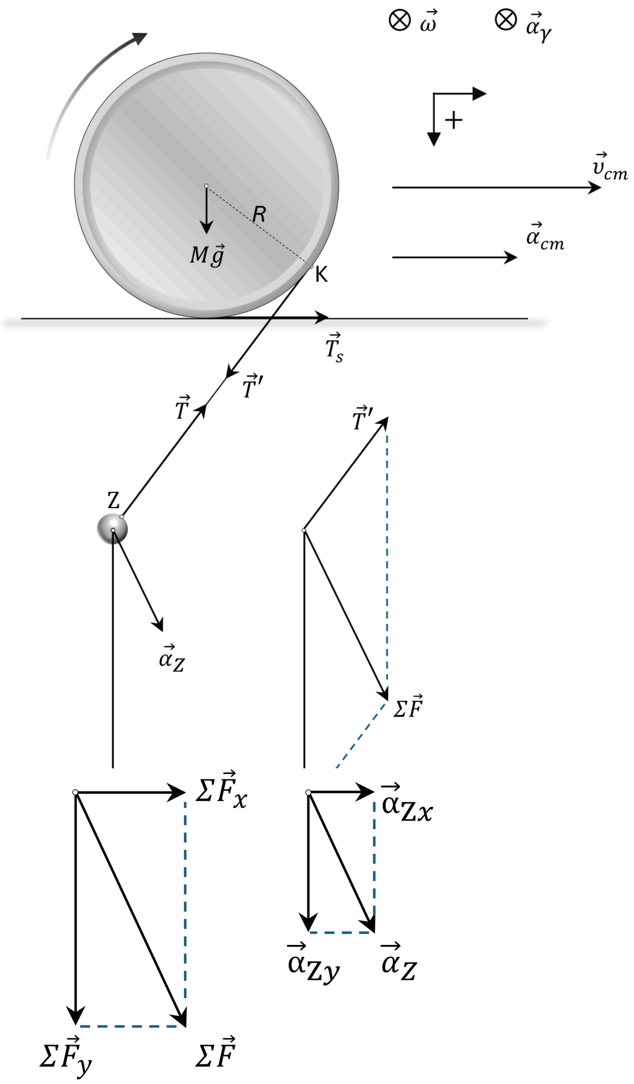
$|T| = \frac{2}{3} m \cdot a_{cm}$ (1)

- Στον y:

$\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} \Rightarrow$

$mg - |T| \cdot συνφ = m \cdot 0,8 \cdot a_{cm}$ (2)

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2)



$$\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} \Rightarrow mg - \frac{2}{3} m \cdot a_{cm} \cdot συνφ = m \cdot 0,8 \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 7,5\, m/s^2.$$

Αντικαθιστώντας την a_{cm} στην (1) με $m = 45\, Kg$, βρίσκουμε $|T| = 225\, N$.

Δ3

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

Η τάση $\vec{T}$ τον τραβάει αριστερά με $\left|T_x\right| = |T| \cdot ημφ = 135\, N$. Αφού επιταχύνεται δεξιά, η στατική τριβή πρέπει αναγκαστικά να έχει φορά προς τα δεξιά και το μέτρο της να είναι μεγαλύτερο από 135 N.

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \Rightarrow \left|T_s\right| - \left|T_x\right| = M \cdot a_{cm} \Rightarrow \left|T_s\right| - 135 = 8 \cdot 7,5 \Rightarrow \left|T_s\right| = 195 \text{ N} \text{ (προς τα δεξιά).}$$

Δ4

Η $\vec{T}'$ δημιουργεί ροπή σύμφωνη με το ρολόι (γιατί ξετυλίγεται), ενώ η $\vec{T}_s$ δημιουργεί ροπή αντίθετη με τη φορά του ρολογιού.

Ως προς το κέντρο του κυλίνδρου έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{cm} = \left|\tau_T\right| - \left|\tau_{T_s}\right| = |T| \cdot R - \left|T_s\right| \cdot R = 225 \cdot 0,5 - 195 \cdot 0,5 = 112,5 - 97,5 = 15\, Kg \cdot m^2/s^2$$

Δ5

Την χρονική στιγμή $t_1 = 2\,s$, οι ταχύτητες της σφαίρας είναι:

$v_{Zx} = a_{Zx} \cdot t_1 = 3 \cdot 2 = 6\,\frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά).

$v_{Zy} = a_{Zy} \cdot t_1 = 6 \cdot 2 = 12\,\frac{m}{s}$ (προς τα κάτω).

α) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ισούται με το αντίθετο του ρυθμού παραγωγής έργου (ισχύος) του βάρους:

$$\frac{dU}{dt} = -P_w = -m \cdot g \cdot v_{Zy} = -45 \cdot 10 \cdot 12 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -5.400\,J$$

(Το πρόσημο μείον είναι σωστό και λογικό, διότι το σώμα κατέρχεται, άρα η δυναμική του ενέργεια μειώνεται).

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ της συνισταμένης δύναμης ($|\Sigma F| \cdot |v| \cdot$ συνθ). Αναλύοντας στους άξονες:

Στον x: $\Sigma F_x = m \cdot a_{Zx} = 45 \cdot 3 = 135\,N$

Στον y: $\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} = 45 \cdot 6 = 270\,N$

Άρα:

$$\frac{dK}{dt} = \left|\Sigma F_x\right| \cdot \left|v_{Zx}\right| + \left|\Sigma F_y\right| \cdot \left|v_{Zy}\right| = (135 \cdot 6) + (270 \cdot 12) = 810 + 3240 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +4.050\,J$$

(Η κινητική ενέργεια αυξάνεται).

γ) Η τάση $\vec{T}$ είναι πλάγια (τραβάει το σώμα Ζ προς τα πάνω και δεξιά, ακολουθώντας τη γωνία φ του νήματος). Αναλύοντάς τη:

$\left|T_x\right| = |T| \cdot$ ημφ $= 225 \cdot 0,6 = 135\,N$ (ομόρροπη της v_{Zx})

$\left|T_y\right| = |T| \cdot$ συνφ $= 225 \cdot 0,8 = 180\,N$ (αντίρροπη της v_{Zy}, άρα το έργο της είναι αρνητικό)

Η ισχύς της είναι:

$P_T = \left|T_x\right| \cdot \left|v_{Zx}\right| - \left|T_y\right| \cdot \left|v_{Zy}\right| = (135 \cdot 6) - (180 \cdot 12) = 810 - 2160 \Rightarrow P_T = - 1.350\, J$

(Λογικό, αφού το νήμα στην ουσία "φρενάρει" μερικώς την πτώση του σώματος, αφαιρώντας του ενέργεια).

Ο Τελικός Έλεγχος:

Ελέγχουμε:

$\frac{dK}{dt} = - \frac{dU}{dt} + P_T$

Πράγματι: $4.050 = - (- 5.400) - 1.350 \Rightarrow 4.050 = 5.400 - 1.350 \Rightarrow 4.050 = 4.050$

kostashagi@gmail.com