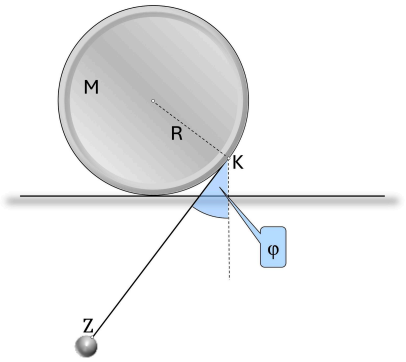
Ο συμπαγής και ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα $M = 8\,Kg$ και ακτίνα $R = 0,5\,m$. Στην περιφέρειά του έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος δύο άκαμπτων παράλληλων οριζόντιων ράβδων που έχουν ανάμεσα τους το κατάλληλο περιθώριο ώστε να περνά το νήμα στη άκρη $Z$ του οποίου συνδεθεί σφαίρα αμελητέας ακτίνας, μάζας $m = 45\,Kg$.




Αρχικά, το σύστημα συγκρατείται ακίνητο με το νήμα τεντωμένο να σχηματίζει γωνία $\varphi$ $(\eta\mu\varphi = 0,6 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8)$ με την κατακόρυφο.

Κάποια στιγμή το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ενώ παρατηρείται ότι, το νήμα ξετυλίγεται διατηρώντας συνεχώς την ίδια σταθερή γωνία με την κατακόρυφο καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.

**Δ1**

Να γράψετε τις εξισώσεις που συνδέουν τα μέτρα της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας της επιτάχυνσης της μικρής σφαίρας ($a_{Zx}$ και $a_{Zy}$) με το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ($a_{cm}$).

**Δ2**

Να δείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έχει μέτρο $\left|a_{cm}\right| = 7,5\,m/s^2$ και να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης $\vec{T}$ του νήματος.

*(Δίνεται $g = 10\,m/s^2$)*

**Δ3**

Να υπολογίσετε το μέτρο και τη φορά της στατικής τριβής $T_s$ που δέχεται ο κύλινδρος από τις ράβδους κατά την κίνησή του.

**Δ4**

Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής $\left(\frac{dL}{dt}\right)$ του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του.

**Δ5**

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\,s$ μετά την απελευθέρωση του συστήματος, να υπολογίσετε για την κρεμάμενη σφαίρα:

α) Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής της δυναμικής ενέργειας $\left(\frac{dU}{dt}\right)$.

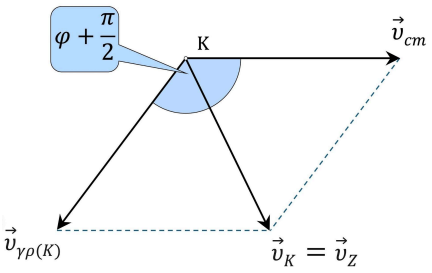
β) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\left(\frac{dK}{dt}\right)$.

γ) Την ισχύ της δύναμης (τάσης) του νήματος ($P_T$) που ασκείται στη σφαίρα, και να επιβεβαιώσετε αριθμητικά ότι ικανοποιείται η σχέση: $\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} + P_T$.

## Λύση

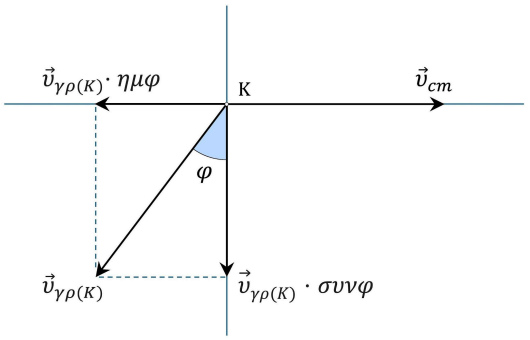
### Δ1

Κατά την κίνηση του συστήματος η διεύθυνση του νήματος είναι σταθερή οπότε, οι ταχύτητες των δύο άκρων του νήματος ίσες:



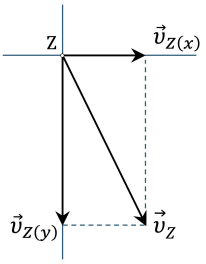

$$\vec{\upsilon}_K=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho(K)}=\vec{\upsilon}_Z$$

Λόγω της κύλισης που εκτελεί ο κύλινδρος, οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho(K)}$ έχουν ίσα μέτρα:




$$\left|\upsilon_{cm}\right|=\left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right|=\omega\bullet R$$

- Στον άξονα $x$ (θετική φορά προς τα δεξιά):




$$\upsilon_{Zx}=\left|\upsilon_{cm}\right|-\left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right|\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow$$
$$\upsilon_{Zx}=\left|\upsilon_{cm}\right|-\left|\upsilon_{cm}\right|\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow$$
$$\frac{d\upsilon_{Zx}}{dt}=\frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt}-\frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt}\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow$$
$$a_{Zx}=\left|a_{cm}\right|-\left|a_{cm}\right|\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow$$
$$a_{Zx}=\left|a_{cm}\right|\cdot(1-0,6)\Rightarrow$$
$$a_{Zx}=0,4\cdot\left|a_{cm}\right|$$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{a}_{Zx}$ βγήκε θετική, δηλαδή η φορά της είναι προς τα δεξιά.

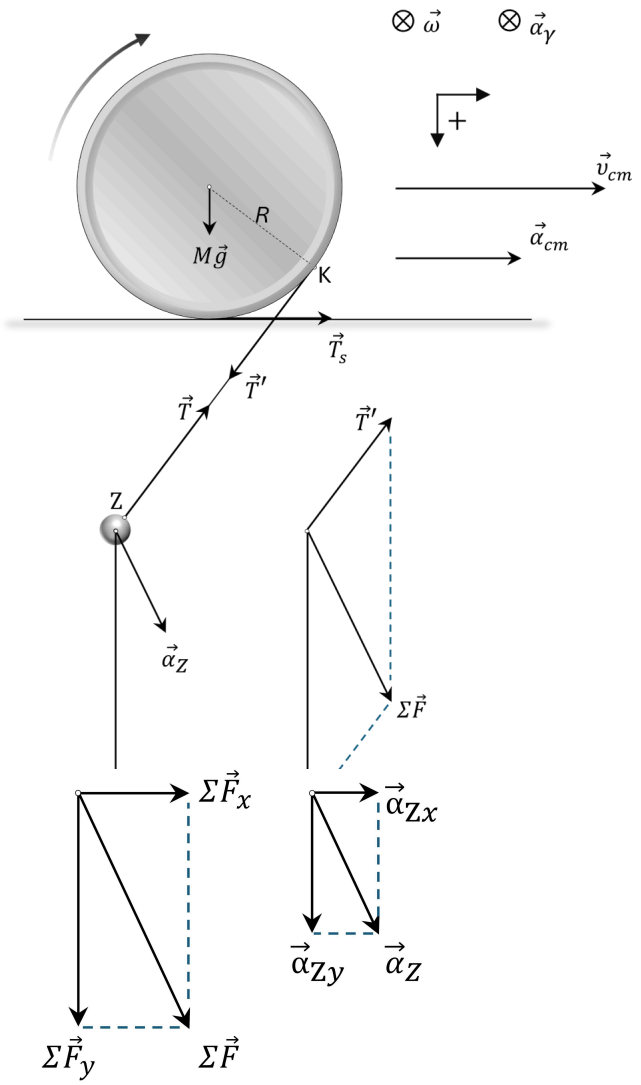
- Στον άξονα y (θετική φορά προς τα κάτω):

$$\upsilon_{Zy}=\left|\upsilon_{\gamma\rho(K)}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow$$
$$\upsilon_{Zy}=\left|\upsilon_{cm}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow$$
$$\frac{d\upsilon_{Zy}}{dt}=\frac{d\left|\upsilon_{cm}\right|}{dt}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow a_{Zy}=\left|a_{cm}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow a_{Zy}=\left|a_{cm}\right|\cdot 0,8$$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{a}_{Zy}$ βγήκε θετική, δηλαδή η φορά της είναι προς τα κάτω.

### Δ2

Οι δύο τάσεις που ασκεί το νήμα είναι αντίθετες διότι είναι αβαρές. Η τάση του νήματος $\vec{T}$ τραβάει την σφαίρα πλάγια (δεξιά και πάνω).




- Στον x:

$\Sigma F_x = m \cdot a_{Zx} \Rightarrow$

$|T| \cdot \eta\mu\varphi = m \cdot 0,4 \cdot a_{cm} \Rightarrow$

$|T| \cdot 0,6 = m \cdot 0,4 \cdot a_{cm} \Rightarrow$

$|T| = \frac{2}{3} m \cdot a_{cm}$ (1)

- Στον y:

$\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} \Rightarrow$

$mg - |T| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot 0,8 \cdot a_{cm}$ (2)

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2)

$$\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} \Rightarrow mg - \frac{2}{3} m \cdot a_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot 0,8 \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 7,5\, m/s^2.$$

Αντικαθιστώντας την $a_{cm}$ στην (1) με $m = 45\, Kg$, βρίσκουμε $|T| = 225\, N$.

**Δ3**

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

Η τάση $\vec{T}$ τον τραβάει αριστερά με $\left|T_x\right| = |T| \cdot \eta\mu\varphi = 135\, N$. Αφού επιταχύνεται δεξιά, η στατική τριβή πρέπει αναγκαστικά να έχει φορά προς τα δεξιά και το μέτρο της να είναι μεγαλύτερο από 135 N.

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \Rightarrow \left|T_s\right| - \left|T_x\right| = M \cdot a_{cm} \Rightarrow \left|T_s\right| - 135 = 8 \cdot 7,5 \Rightarrow \left|T_s\right| = 195\ \text{N}$$ (προς τα δεξιά).

**Δ4**

Η $\vec{T'}$ δημιουργεί ροπή σύμφωνη με το ρολόι (γιατί ξετυλίγεται), ενώ η $\vec{T}_s$ δημιουργεί ροπή αντίθετη με τη φορά του ρολογιού.

Ως προς το κέντρο του κυλίνδρου έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{cm} = \left|\tau_T\right| - \left|\tau_{T_s}\right| = |T| \cdot R - \left|T_s\right| \cdot R = 225 \cdot 0,5 - 195 \cdot 0,5 = 112,5 - 97,5 = 15\, Kg \cdot m^2/s^2$$

**Δ5**

Την χρονική στιγμή $t_1 = 2\, s$, οι ταχύτητες της σφαίρας είναι:

$v_{Zx} = a_{Zx} \cdot t_1 = 3 \cdot 2 = 6\, \frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά).

$v_{Zy} = a_{Zy} \cdot t_1 = 6 \cdot 2 = 12\, \frac{m}{s}$ (προς τα κάτω).

**α)** Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ισούται με το αντίθετο του ρυθμού παραγωγής έργου (ισχύος) του βάρους:

$$\frac{dU}{dt} = -P_w = -m \cdot g \cdot v_{Zy} = -45 \cdot 10 \cdot 12 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -5.400\, J$$

*(Το πρόσημο μείον είναι σωστό και λογικό, διότι το σώμα κατέρχεται, άρα η δυναμική του ενέργεια μειώνεται).*

**β)** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ της συνισταμένης δύναμης ( $|\Sigma F| \cdot |v| \cdot \text{συν}\theta$). Αναλύοντας στους άξονες:

*Στον x:* $\Sigma F_x = m \cdot a_{Zx} = 45 \cdot 3 = 135\, N$

*Στον y:* $\Sigma F_y = m \cdot a_{Zy} = 45 \cdot 6 = 270\, N$

Άρα:

$$\frac{dK}{dt} = \left|\Sigma F_x\right| \cdot \left|v_{Zx}\right| + \left|\Sigma F_y\right| \cdot \left|v_{Zy}\right| = (135 \cdot 6) + (270 \cdot 12) = 810 + 3240 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +4.050\, J$$

*(Η κινητική ενέργεια αυξάνεται).*

**γ)** Η τάση $\vec{T}$ είναι πλάγια (τραβάει το σώμα Z προς τα πάνω και δεξιά, ακολουθώντας τη γωνία φ του νήματος). Αναλύοντάς τη:

$\left|T_x\right| = |T| \cdot \eta\mu\varphi = 225 \cdot 0,6 = 135\, N$ (ομόρροπη της $v_{Zx}$)

$\left|T_y\right| = |T| \cdot \text{συν}\varphi = 225 \cdot 0,8 = 180\, N$ (αντίρροπη της $v_{Zy}$, άρα το έργο της είναι αρνητικό)

Η ισχύς της είναι:

$P_T = |T_x| \cdot |v_{Zx}| - |T_y| \cdot |v_{Zy}| = (135 \cdot 6) - (180 \cdot 12) = 810 - 2160 \Rightarrow P_T = -1.350\,J$

*(Λογικό, αφού το νήμα στην ουσία "φρενάρει" μερικώς την πτώση του σώματος, αφαιρώντας του ενέργεια).*

**Ο Τελικός Έλεγχος:**

Ελέγχουμε:

$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} + P_T$

Πράγματι: $4.050 = -(-5.400) - 1.350 \Rightarrow 4.050 = 5.400 - 1.350 \Rightarrow 4.050 = 4.050$

**kostashagi@gmail.com**