

- Câu 1.** [2D3-4.3-3] (Đặng Thành Nam Đề 1) Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng
- A. -2 . B. -1 . C. 2 . D. 1 .

Lời giải

Tác giả: Vũ Việt Tiến, FB: Vũ Việt Tiến

Chọn B

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} &= \int_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int_0^1 \frac{d(x+2)}{x+2} - 2 \int_0^1 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} \\ &= \ln(x+2) \Big|_0^1 + \frac{2}{x+2} \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3 \end{aligned}$$

Ta có $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 1$. Vậy $3a + b + c = -1$.

- Câu 2.** [2D3-4.3-3] (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Biết $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.

- A. -5 . B. -4 . C. 5 . D. 0 .

Lời giải

Tác giả: Trần Thơm; Fb: Kem LY

Chọn B

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx &= \int_1^4 \left(x + 2 + \frac{3(2x-1)}{x^2 - x + 3} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_1^4 + 3 \int_1^4 \frac{d(x^2 - x + 3)}{x^2 - x + 3} = \frac{27}{2} + 3 \ln |x^2 - x + 3| \Big|_1^4 = \frac{27}{2} + 3 \ln 5 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5, \text{ suy ra } a = 27, b = 2, c = 3.$$

Vậy $P = a - b^2 - c^3 = -4$.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

$$\text{Ta có } \int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = \int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx - c \ln 5$$

$$\text{Đặt } f(X) = \frac{a}{b} = \int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx - X \ln 5 \text{ với } X = c.$$

Vì a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên ta có thể tìm giá trị của X nguyên dương để $f(X) = \frac{a}{b}$ là số hữu tỉ.

Bước 1: Bấm tích phân $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx \rightarrow \text{Shift} \rightarrow \text{STO} \rightarrow \mathbf{A}$.

Bước 2: MODE $\rightarrow 7 \rightarrow$ Nhập $f(X) = A - X \ln 5 \rightarrow X$ chạy từ 1 đến 20, STEP = 1.

Bước 3: Ta thấy chỉ có một giá trị duy nhất $X = 3$ để $f(X) = 13,5$ là số hữu tỉ.

Vậy $c = 3$ và $\frac{a}{b} = 13,5 = \frac{27}{2}$ nên $a = 27, b = 2$. Do đó $P = a - b^2 - c^3 = -4$.

Câu 3. [2D3-4.3-3] (SỞ LÀO CAI 2019) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = 2a + b$
A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Đào Thị Thái Hà ; Fb: Thái Hà Đào

Chọn A

Đặt $t = \sin x$

$\Rightarrow dt = \cos x dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$

$= \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3} = 2 \ln 2 - \ln 3$

Vậy $a = 2, b = -1$ nên $P = 3$.

Câu 4. [2D3-4.3-3] (Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3) Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a - b$ là
A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6.t^5 dt$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1; \quad x = 64 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra
$$I = \int_1^2 \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int_1^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt$$
$$= 6 \int_1^2 (t^2 - t + 1) dt - 6 \int_1^2 \frac{1}{t+1} d(t+1)$$
$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^2 - 6 \ln|t+1| \Big|_1^2 = 6 \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{6} \right) - 6(\ln 3 - \ln 2) = 11 - 6 \ln \frac{3}{2} = 6 \ln \frac{2}{3} + 11$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5$.

Câu 5. [2D3-4.3-3] (THCS-THPT-NGUYỄN-KHUYẾN-TP-HCM-24THÁNG3) Cho hàm số

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x) dx = 2, \int_0^2 f(4x) dx = 6, \int_{-2}^2 f(3|x|+2) dx$. Tính

A. $\frac{20}{3}$.

B. 20.

C. $\frac{40}{3}$

D. 40.

Lời giải

Tác giả: Ngô Thanh Trà; Fb: Tra Thanh Ngo

Chọn C

Xét $A = \int_0^1 f(2x) dx$. Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

Suy ra: $A = \int_0^2 f(t) \frac{dt}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^2 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4$

Xét $B = \int_0^2 f(4x) dx$. Đặt $m = 4x \Rightarrow dm = 4dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow m = 0 \\ x = 2 \Rightarrow m = 8 \end{cases}$

Suy ra: $B = \int_0^8 f(m) \frac{dm}{4} \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{4} \int_0^8 f(m) dm \Leftrightarrow \int_0^8 f(m) dm = 24 \Rightarrow \int_0^8 f(x) dx = 24$

Ta có: $I = \int_{-2}^2 f(3|x|+2) dx$

$= \int_{-2}^0 f(3|x|+2) dx + \int_0^2 f(3|x|+2) dx$

$= \int_{-2}^0 f(-3x+2) dx + \int_0^2 f(3x+2) dx = I_1 + I_2$

Đặt $h = -3x+2 \Rightarrow dh = -3dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow h = 8 \\ x = 0 \Rightarrow h = 2 \end{cases}$

$$I_1 = \int_8^2 f(h) \frac{dh}{-3} = \frac{1}{3} \int_2^8 f(h) dh = \frac{1}{3} \int_2^8 f(x) dx$$

Suy ra:

$$\text{Ta có: } \int_0^8 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^8 f(x) dx \Rightarrow \int_2^8 f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$$

$$\text{Nên } I_1 = \frac{1}{3}(24 - 4) = \frac{20}{3}$$

$$\text{Đặt } k = 3x + 2 \Rightarrow dk = 3dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 2 \\ x = 2 \Rightarrow k = 8 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } I_2 = \int_2^8 f(k) \frac{dk}{3} = \frac{1}{3} \int_2^8 f(k) dk = \frac{1}{3} \int_2^8 f(x) dx = \frac{20}{3}$$

$$\text{Vậy ta có } I = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3} \text{ nên chọn đáp án C.}$$

xuantoan204@gmail.com