

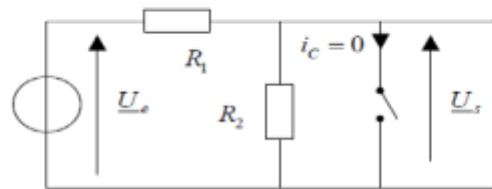
Solutions des exercices 5 -6 et 7 De la Série N°2: les Filtres Analogique

Solution ex 4 :

Solution:

1°) On étudie le comportement physique du filtre réciproquement aux basses pulsations et aux hautes pulsations.

Aux basses pulsations, typiquement $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. On a donc le schéma équivalent suivant:

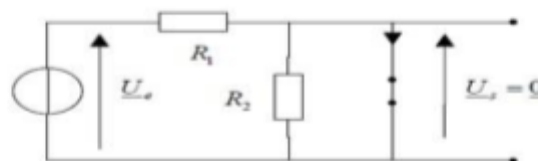


La tension de sortie cherchée se retrouve aux bornes du conducteur ohmique R_2 . Par l'application du théorème du pont diviseur, on peut la trouver en fonction de la tension délivrée par le générateur. On trouve:

$$U_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e.$$

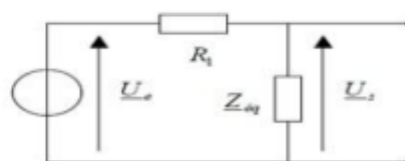
Donc, l'amplitude du signal de sortie correspond à une atténuation de l'amplitude du signal d'entrée.

Aux hautes pulsations, typiquement $\omega \rightarrow +\infty$, le condensateur se comporte donc comme un interrupteur fermé. La tension à ses bornes est nulle. On a donc le schéma équivalent suivant:



Ainsi, on a donc $U_s = 0$. On a donc un **filtre passe bas d'ordre un**.

2°) La fonction de transfert se définit comme $T(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$. Pour trouver le plus rapidement, la tension de sortie rapidement en fonction de la tension d'entrée, on peut remplacer le groupement parallèle du condensateur et du conducteur ohmique R_2 et obtenir le schéma équivalent suivant:



On peut calculer l'admittance facilement du groupement parallèle ($\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_i \underline{Y}_i$). On a:

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R_2} + jC\omega.$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème du pont diviseur de tension pour trouver la fonction de transfert. On a donc:

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R_1 + \underline{Z}_{eq}} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{\underline{Z}_{eq}}} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e.$$

Il suffit donc ensuite de remplacer l'admittance par son expression donnée ci-dessus. On trouve:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}_{eq}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 C \omega} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \left(1 + j \frac{R_1 C \omega}{1 + \frac{R_1}{R_2}}\right)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \omega}.$$

On peut donc mettre la fonction de transfert sous la forme suivante:

$$\boxed{\underline{T}(jf) = \frac{T_0}{1 + j \frac{f}{f_0}}} \text{ avec } \begin{cases} T_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ f_0 = \frac{1}{2\pi R_{eq} C} \end{cases}$$

où $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ est la résistance équivalente des deux résistances considérées en parallèle.

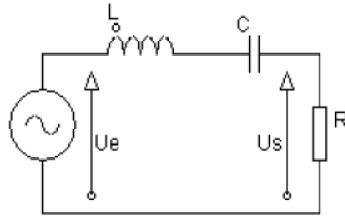
Remarque: il était donc piègeur de tenter de deviner la constante de temps du circuit ou la fréquence de coupure directement en considérant le groupement parallèle du condensateur et de la résistance R_2 . En effet, c'est la résistance équivalente qui entre en jeu.

T_0 est aussi appelée amplification statique, puisqu'elle correspond à la valeur de la fonction de transfert obtenue pour la pulsation ou fréquence nulle.

2°) On trouve $T_0 = 0,1$ et $f_0 \approx 17,7$ kHz.

Solution ex 5 :

Soit le circuit suivant :



$$U_e = 10V \quad R = 500\Omega \quad L = 100mH \quad C = 1nF$$

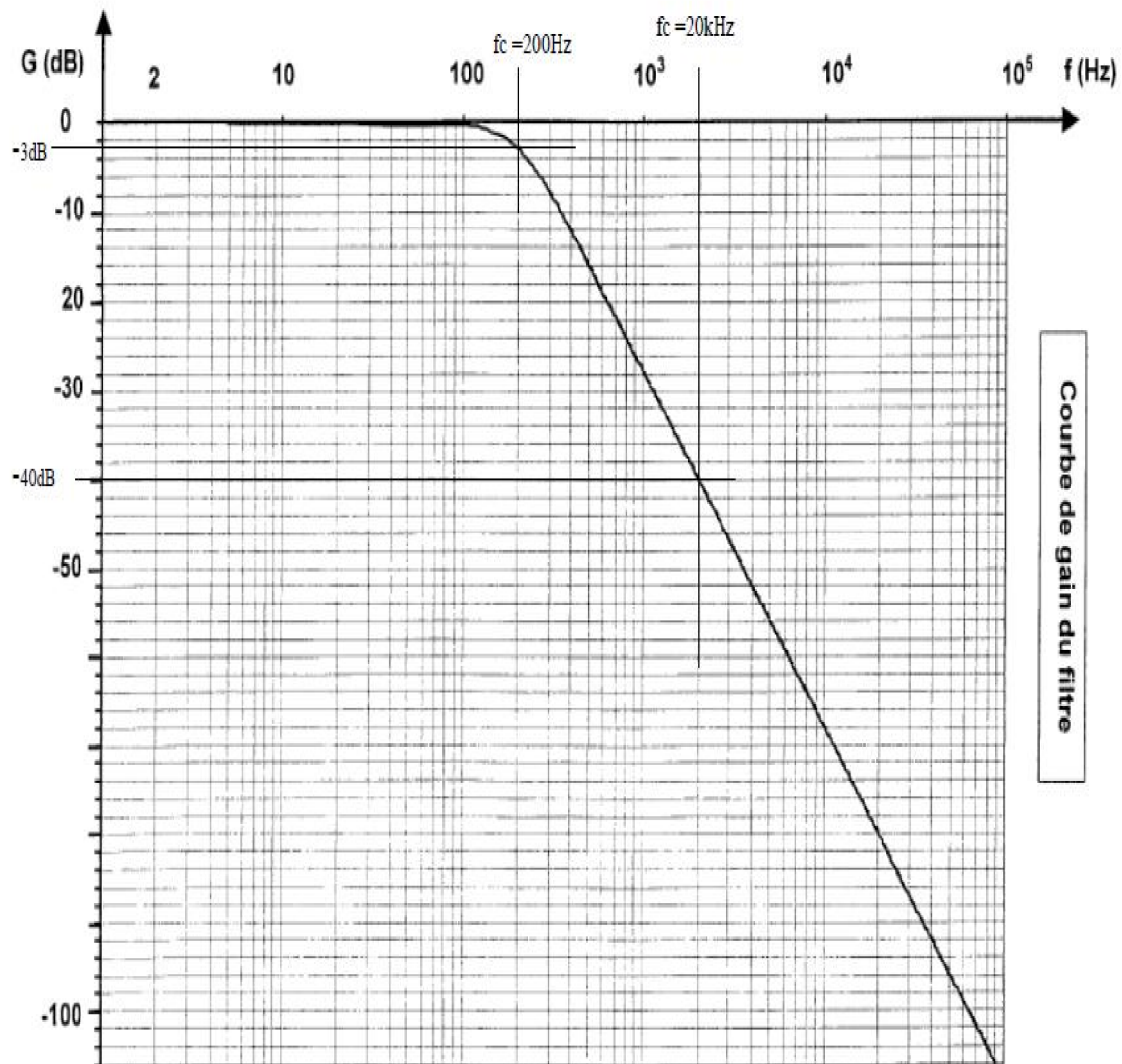
1. $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 15,9kHz$
2. $X_C = X_L = 2\pi f_r L = (L/C)^{1/2} = 10k\Omega$
3. $Q_s = X_L/R = 20$
4. $BW = f_r/Q_s = 795 \text{ Hz}$
5. $f_1 = f_r - BW/2 = 15,5kHz$ et $f_2 = f_r + BW/2 = 16,3kHz$
6. à f_1 et f_2 : $U_s = U_e/\sqrt{2} = 7,07V$ et à f_r : $U_s = U_e = 10V$ ($Z = R + jX_L - jX_C = R$)
7. à la fréquence de résonance : $I = U_e / R = 10V/500\Omega = 0,02A = 20mA$
8. à la résonance : $U_R = IR = U_e = 10V$ $U_L = U_C = IX_L = 0,02A \times 10k\Omega = 200V$!!! c'est le phénomène de surtension.

Solution ex 6:

La courbe de gain $G_{dB} = 20 \log G$ ($G = U_s/U_e$) en fonction de la fréquence est donnée ci-dessous.

1. Graphiquement la fréquence de coupure à -3dB du filtre est $f_c = 200Hz$.
2. Pour $f < 10Hz$, $G_{dB} = 0 \Rightarrow U_s = U_e$ et $G = 1$

Pour $f = 20kHz$, $G_{dB} = -40dB = 20 \log G \Rightarrow \log G = -2 \Rightarrow G = 0,01$
3. Si, pour fréquence $f = 20kHz$, $U_e = 24,8V$ et $G = U_s/U_e = 0,01 \Rightarrow U_s = 0,248V$
4. Si $U_e = v$ (tension continue) $\Rightarrow$ la fréquence $f = 0 \Rightarrow L\omega = 0$ et $1/C\omega = \infty \Rightarrow$ circuit ouvert et $U_s = U_e = v$



Courbe de gain du filtre

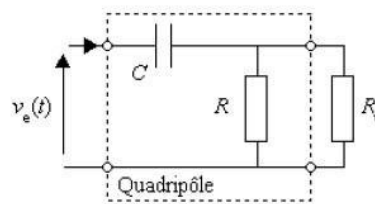
Solution de l' Exercice 5 :

On étudie le quadripôle représenté ci-contre. La résistance R_u placée entre ses bornes de sortie représente sa charge.

1. Détermination de l'impédance d'entrée

a. Exprimer l'impédance d'entrée Z_e du quadripôle en fonction de C , R , R_u et de la pulsation ω des grandeurs d'entrée.

Les résistances R et R_u sont en parallèle et leur association est en série avec la capacité C .



$$R = 1 \text{ k}\Omega, C = 470 \text{ nF}, R_u = 470 \Omega$$

$$Z_e = \frac{R_u R}{R_u + R} + \frac{1}{j C \omega}$$

b. Mettre l'impédance d'entrée sous la forme $Z_e = R_e + j X_e$ et donner les expressions de R_e et X_e en fonction des éléments du montage.

Comme $\frac{1}{j} = -j$, la relation précédente devient $Z_e = \frac{R_u R}{R_u + R} - j \frac{1}{C \omega}$ et en identifiant avec la forme

proposée dans l'énoncé $R_e = \frac{R_u R}{R_u + R}$ et $X_e = \frac{-1}{C \omega}$

c. Vers quelle valeur tend le module de l'impédance d'entrée si les grandeurs d'entrée sont continues ?

Raisonnement « physique » : si les grandeurs sont continues alors la capacité se comporte comme un circuit ouvert et l'impédance d'entrée tend vers l'infini.

Raisonnement « mathématique » : le module de l'impédance d'entrée s'écrit $Z_e = \sqrt{\left(\frac{R_u R}{R_u + R}\right)^2 + \left(\frac{1}{C \omega}\right)^2}$, si

la pulsation ω tend vers zéro (continu) alors Z_e tend vers l'infini.

2. Étude pour une fréquence de 1000 Hz

La tension d'entrée du quadripôle est sinusoïdale, de fréquence 1 kHz et de valeur efficace 8 V.

a. Calculer le module de l'impédance d'entrée pour 1 kHz.

Le module de l'impédance d'entrée s'écrit $Z_e = \sqrt{\left(\frac{R_u R}{R_u + R}\right)^2 + \left(\frac{1}{C \omega}\right)^2}$ soit pour 1 kHz

$$Z_e = \sqrt{\left(\frac{470 \times 1000}{470 + 1000}\right)^2 + \left(\frac{1}{470 \cdot 10^{-9} \times 2 \pi \times 1000}\right)^2} = 466 \Omega$$

b. En déduire la valeur efficace de l'intensité en entrée du quadripôle.

Puisque $Z_e = \frac{V_e}{I_e}$ alors $I_e = \frac{V_e}{Z_e} = \frac{8}{466} = 17,2 \text{ mA}$

c. Calculer l'argument de l'impédance d'entrée pour 1 kHz.

La partie imaginaire étant négative, l'argument sera négatif. Expression du cosinus :

$$\cos(\text{Arg}(Z_e)) = \frac{\frac{R_u R}{R_u + R}}{\sqrt{\left(\frac{R_u R}{R_u + R}\right)^2 + \left(\frac{1}{C \omega}\right)^2}} = \frac{\frac{470 \times 1000}{470 + 1000}}{466} = 0,686 \text{ qui donne}$$

$$\text{Arg}(Z_e) = \arccos(0,686) = -47^\circ$$

d. En déduire le déphasage de la tension par rapport à l'intensité en entrée du quadripôle.

Puisque $Z_e = \frac{V_e}{I_e}$ alors $\text{Arg}(Z_e) = \text{Arg}(V_e) - \text{Arg}(I_e)$ soit $\text{Arg}(V_e) = \text{Arg}(Z_e) + \text{Arg}(I_e)$, la

tension est déphasée de $\text{Arg}(Z_e) = -47^\circ$ par rapport à l'intensité : la tension est en retard de 47° sur l'intensité.

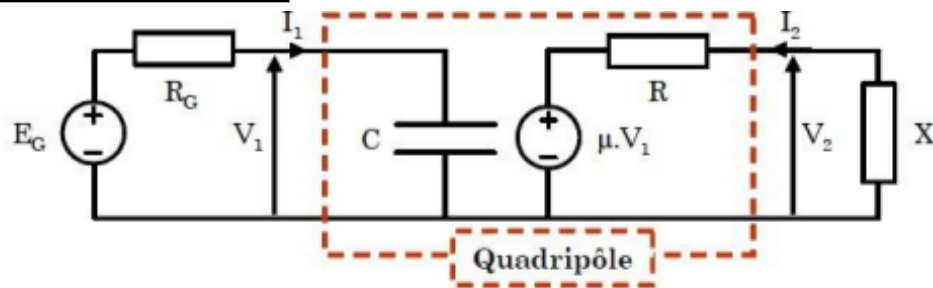


Figure II.1.

On se propose d'étudier les caractéristiques du montage de la figure (II.1) qui inclut un quadripôle constitué des éléments C , $\mu.V_1$ et R .

I.1. Par la méthode de votre choix, déterminer les paramètres impédances de ce quadripôle

$$Z_{11} = 1/(jC\omega) \quad Z_{12} = 0$$

$$Z_{21} = \mu/(jC\omega) \quad Z_{22} = R$$

I.2. Déterminer l'expression du gain en tension $A_V = V_2/V_1$.

$$A_V = \frac{V_2}{V_1} = \mu \cdot \frac{X}{X + R}$$

I.3. Déterminer l'expression du gain en tension à vide A_{V0} .

$$A_{V0} = \frac{V_2}{V_1} = \mu$$

I.4. Déterminer l'expression de la résistance d'entrée, R_E .

$$R_E = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{jC\omega}$$