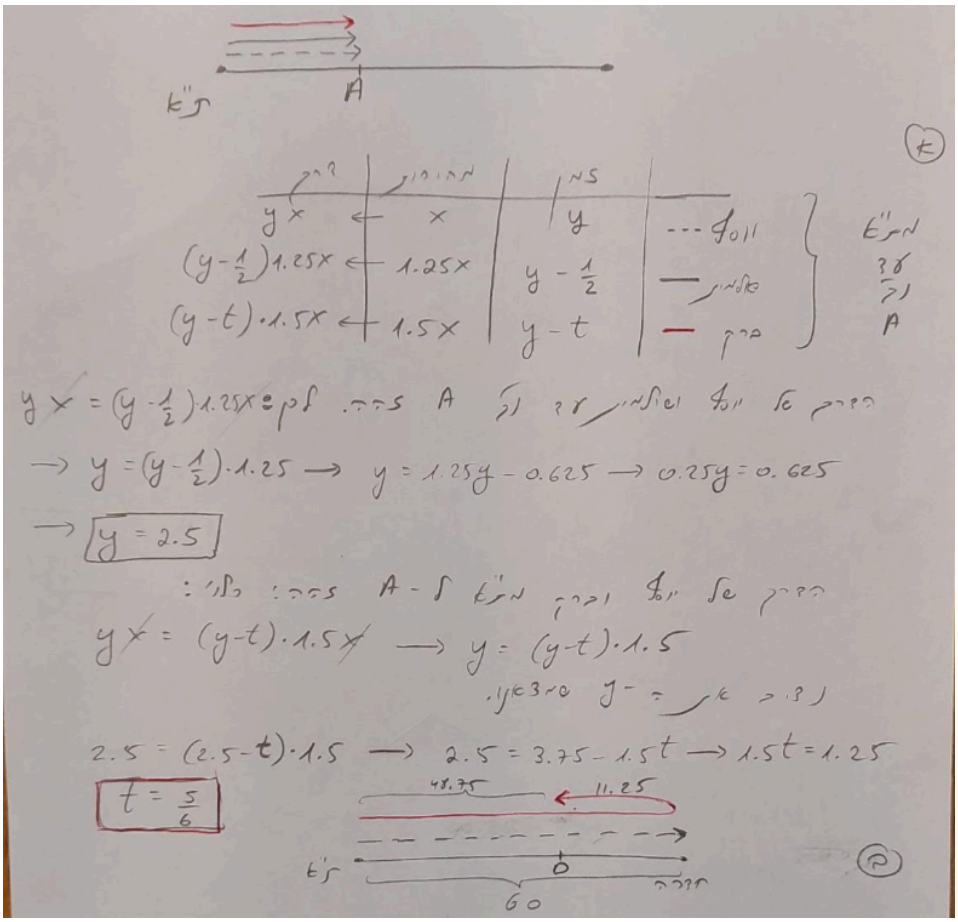
מתוך המתוכנת של יעל נמט

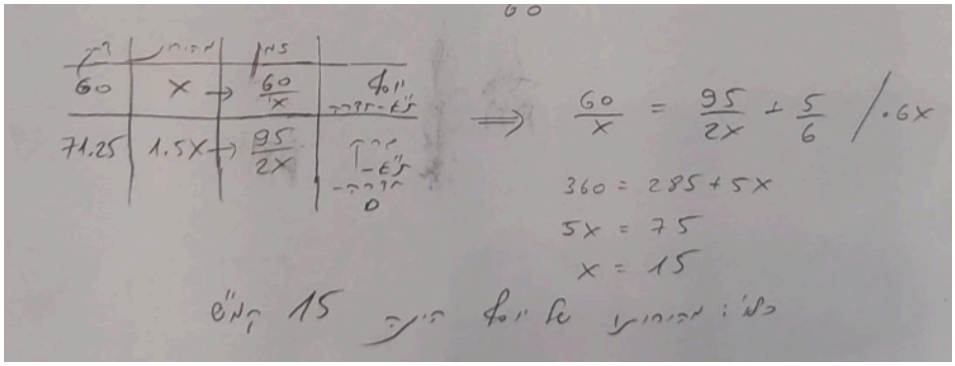
1. יוסף יצא רכוב על אופנוע מתל אביב במהירות קבועה. 30 דקות לאחר מכן, יצאה שולמית במכוניתה, גם כן מתל אביב, בכיוונו של יוסף, אך במהירות הגדולה ב- 25% מזו של יוסף. כעבור t שעות מרגע יציאתו של יוסף, יצא ברק, גם כן מתל אביב, ונסע במכוניתו בכיוון הנסיעה של יוסף ושולמית. מהירותו של ברק גדולה פי 1.5 ממהירותו של יוסף. ברק השיג את יוסף ושולמית באותו הזמן.

א. מצאו את t.

ב. יוסף, שולמית, וברק נסעו כולם לחתונת חברם בחדרה במרחק של 60 ק"מ מתל אביב. לאחר שברק הגיע למקום החופה, נזכר ששכח את המתנה בבית, ולכן החל לחזור לכיוון תל-אביב. ידוע כי כאשר הגיע יוסף לחופה, ברק היה במרחק של 48.75 ק"מ מתל-אביב. מצא את המהירות של יוסף.

ג. כשברק השיג את יוסף ושולמית השעה הייתה 11:00. באיזו שעה (אחרי 11:00) היה המרחק בין יוסף וברק 3.75 ק"מ? הבחן בין שתי אפשרויות.





מתוך המתכונת של יעל גולשטיין

2. בסדרה חשבונית יש $2n+1$ איברים. סכום $n+1$ האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה. נתון שהאיבר הראשון הוא שלילי.

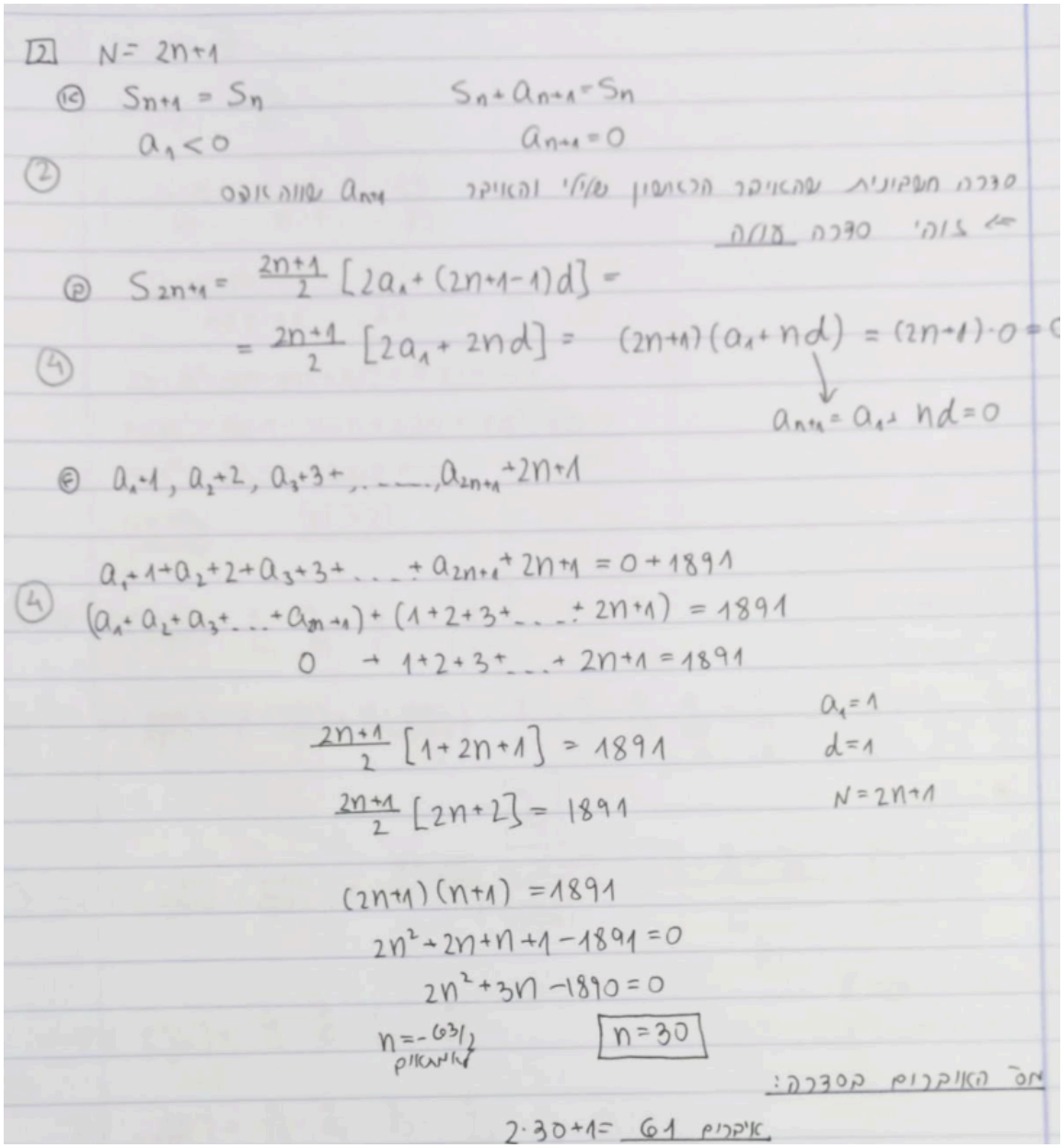
1. 1) מצאי את האיבר a_{n+1}.

2) קבעי האם הסדרה עולה או יורדת. נמקי.

ב. חשבי את הסכום של $2n+1$ האיברים של הסדרה.

ג. לכל איבר בסדרה הנתונה הוסיפו את המספר המציין את מקומו בסדרה (לאיבר הראשון הוסיפו 1, לאיבר השני הוסיפו 2 וכו').

הסכום של הסדרה החדשה גדול ב- 1891 מהסכום של הסדרה הנתונה.



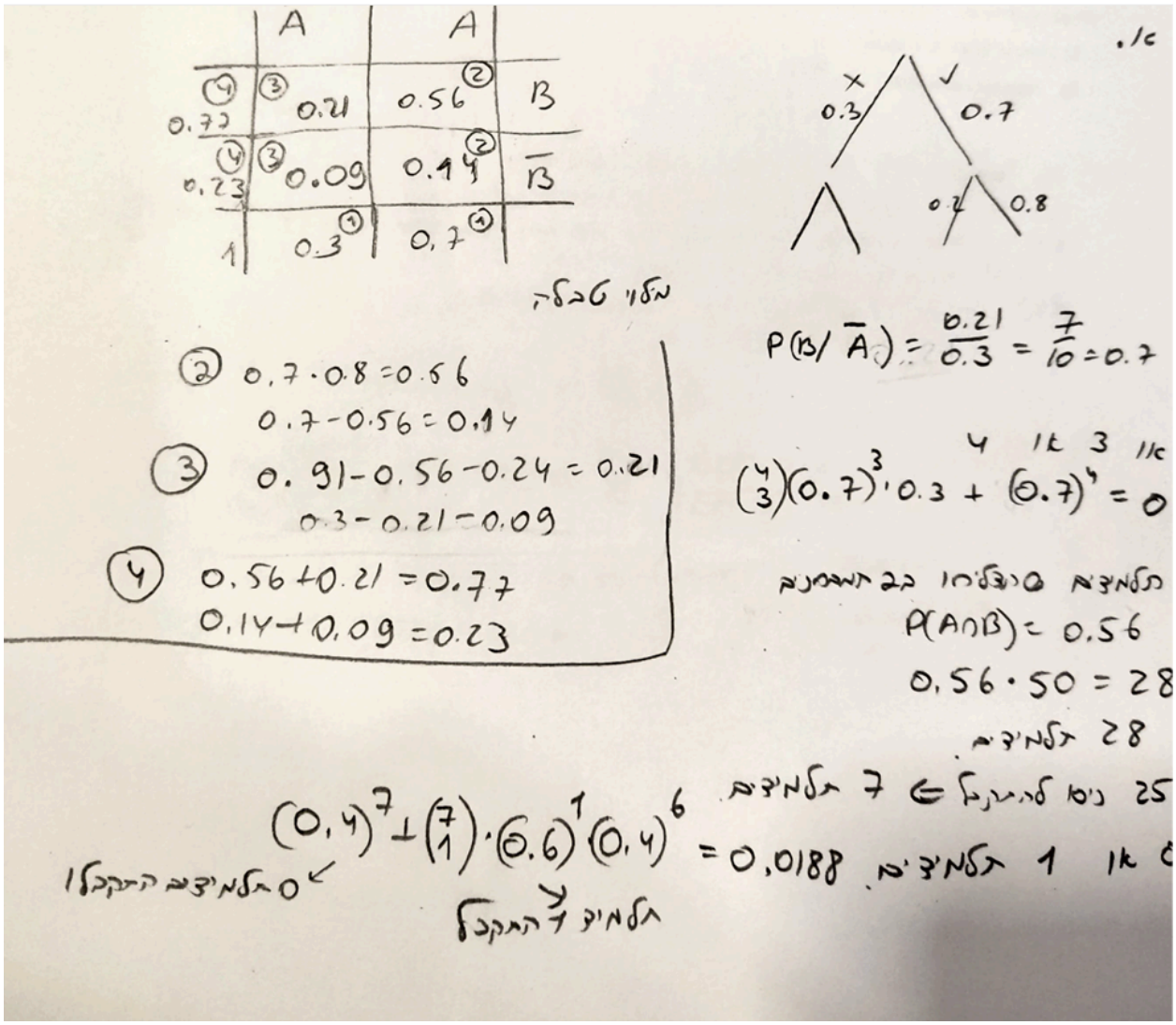
מתוך המתכונת של אילן רמתי

בחוג למתמטיקה נערך מבחן בתחילת השנה ומבחן נוסף בסיום השנה.
משנים קודמות ידוע כי 70% מהסטודנטים מצליחים במבחן הראשון. ידוע גם כי 80% מבין המצליחים במבחן הראשון, מצליחים גם במבחן השני. 91% מבין הסטודנטים בחוג מצליחים לפחות באחד משני המבחנים.

א. בוחרים באקראי סטודנט למתמטיקה. ידוע שהוא נכשל במבחן הראשון. מהי ההסתברות שהצליח במבחן השני?

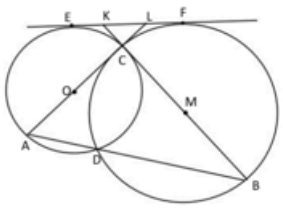
ב. בוחרים באקראי 4 סטודנטים למתמטיקה. מהי ההסתברות שלפחות שלושה מהם יצליחו במבחן השני אם ידוע שנכשלו במבחן הראשון?

ג. מספר התלמידים בחוג למתמטיקה הוא 50. תלמידים שהצליחו בשני המבחנים רשאים לנסות להתקבל למסלול ישיר לדוקטורט. 25% מהזכאים ניסו להתקבל. ידוע כי ההסתברות של תלמיד להתקבל היא 0.6. מה ההסתברות שיתקבל לכל היותר תלמיד אחד?



מתוך מתכונת של עירוני ג

<u>פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור</u>



4. המעגלים שמרכזיהם O ו-M נחתכים בנקודות C ו-D.
דרך הנקודה C עוברים שני קטרים:CA ו- CB (AC<BC).
CA קוטר המעגל O ו- CB קוטר המעגל M.

א. הוכיחו: הנקודות A, D ו-B נמצאות על ישר אחד.

ב. נתון AC משיק למעגל M בנקודה C.

1) הוכיחו: BC משיק למעגל O בנקודה C.

2) הוכיחו : $CD^2 = AD \cdot DB$.

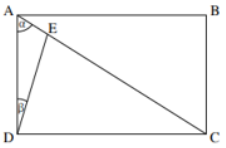
3) נתון: DB=9 , AD=4
חשבו את אורכי הרדיוסים של המעגלים O ו-M.

ג. משיק משותף לשני המעגלים חותך את המעגל O בנקודה E ואת המעגל M בנקודה F (ראו שרטוט).
המשכי הקטרים AC ו- BC חותכים את המשיק המשותף בנקודות L ו- K בהתאמה.

1) הראו כי: $\measuredangle LKC = 2 \cdot \measuredangle KEC$.

2) חשבו את הזווית $\measuredangle ECF$.

שאלה מתוך 2019 מועד ב



5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).
נתון כי $\sphericalangle DAC = \alpha$,
$\sphericalangle ADE = \beta$.

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β.

והוכח כי היחס הזה שווה ל- $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$

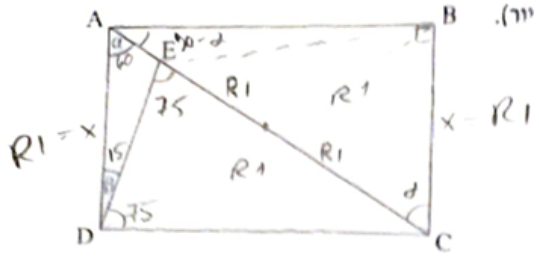
ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^o$, $\beta = 15^o$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווקיים.

(2) הבע באמצעות R_1 את צלעות המלבן AB ו DC

(3) הבע באמצעות R_1 את BE^2 והוכח כי $BE^2 = {R_1}^2(4-\sqrt{3})$



ציור:

$\triangle ABC$: $\frac{x}{\sin(90-\alpha)} = 2R_1$

$\triangle ADE$: $\frac{x}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R_2$

א) $\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$

ב) $\alpha = \beta$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} < 2$:הוכח

$\Rightarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} < 2$ ס"ג 3

$\Rightarrow \sin\alpha < 1$ ס"ג 3

כיוון שבמשולש חד זווית מקבילית $\alpha = 90$

שזה נכון כמובן.

ג) (1)

$\sphericalangle EDC = 75$ (נשלים לזווית ישרה)

$\sphericalangle E = 75$ (זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים)

$EC = DC$ (מול זוויות שוות צלעות שוות)

$\Leftarrow$

(2) שם

$AD = R_1$ $\Leftarrow$ $\frac{AD}{\sin 30} = 2R_1$

$DC = \sqrt{3}R_1$ $\Leftarrow$ $\frac{DC}{\sin 60} = 2R_1$

נשמע.

$DC = EC = \sqrt{3}R_1$

$\triangle ECB$: $BE^2 = R_1^2 + (\sqrt{3}R_1)^2 - 2R_1\sqrt{3}R_1\cos 150$

$BE^2 = R_1^2 + 3R_1^2 - 2\sqrt{3}R_1^2 \cdot \frac{1}{2}$

$BE^2 = 4R_1^2 - \sqrt{3}R^2$

$BE^2 = R_1^2(4-\sqrt{3})$

נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x^2-ax+a^2}{x^2}$ ו: $g(x)=\frac{a-x}{x}$ $(0<a)$.

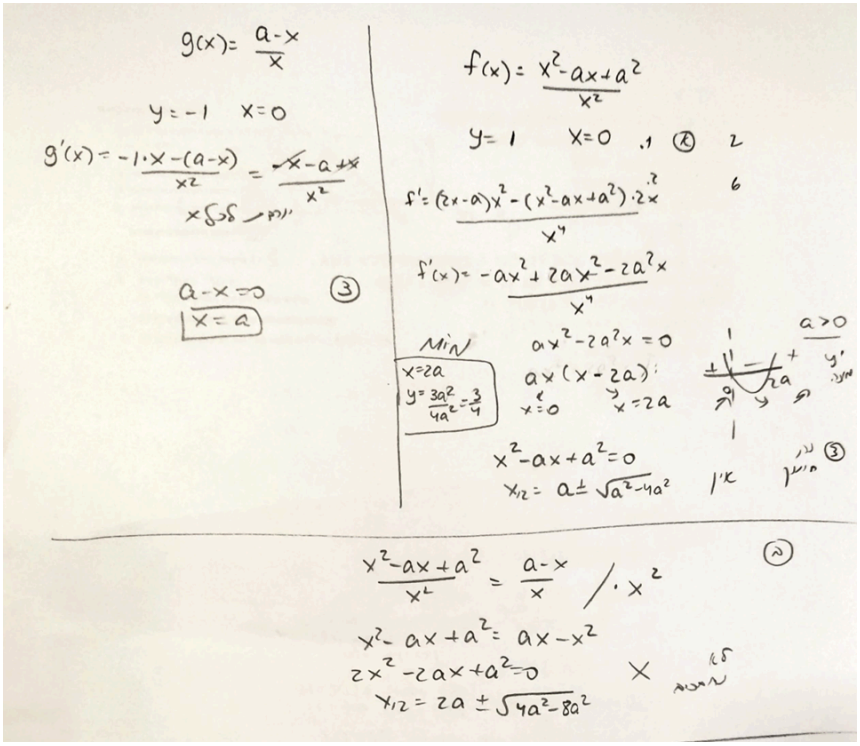
א. היעזרו בפרמטר a, במידת הצורך ומצאו עבור כל אחת מהפונקציות את:

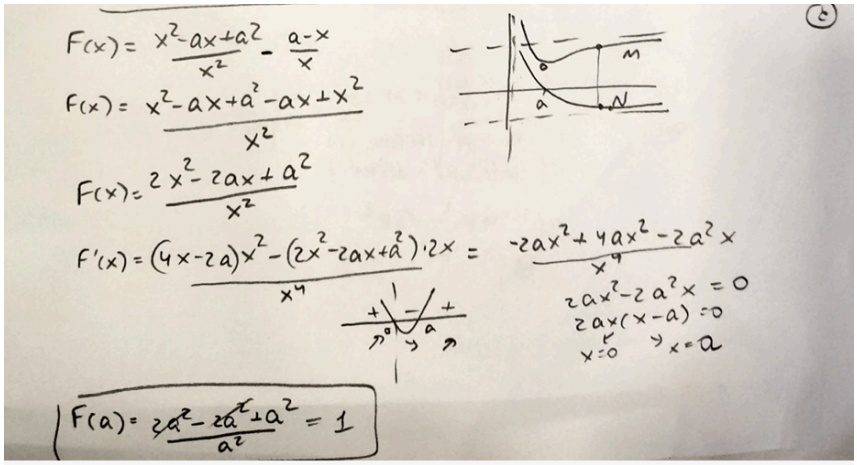
1. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן, אם יש כאלה.
3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.

ב. קבעו האם הגרפים של הפונקציות נחתכים זה עם זה. נמקו.

ג. שרטטו סקיצות של הגרפים של הפונקציות באותה מערכת צירים ברביעים הראשון והרביעי בלבד.

ד. הנקודות M ו-N נמצאות ברביעים אלו על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה, כך שהישר MN מקביל לציר ה-y. חשבו את אורכו המינימלי האפשרי של הישר MN.





שאלה 6: מתוך בני גורן עם שינויים

נתונה הפונקציה: $f(x) = a + \frac{b}{(2x-1)^3}$

א. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם זה תלוי בa או b.הבחן בין המקרים.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה (הבע באמצעות פרמטרים במידת הצורך)

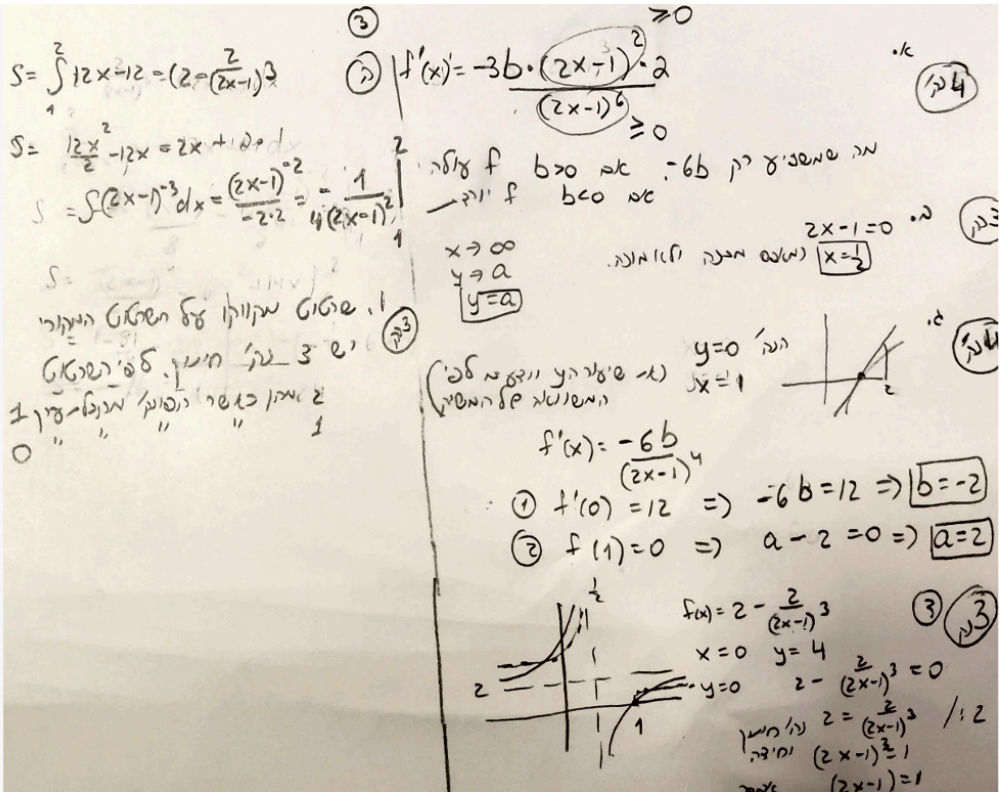
ג. העבירו משיק בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x .
משוואת המשיק היא $y = 12x - 12$
מצא את a ואת b

הצב: a=2, b=-2

ד. מצא את נקודות החיתוך הנוספות עם הצירים במידה והן קיימות ושרטט את גרף הפונקציה.

ה. על מנת לחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והישר x=2, כתוב את האינטגרל המתאים ובצע את פעולת האינטגרל (אין צורך להציב את הגבולות ולחשב את השטח)

ו. שרטט ללא חקירה נוספת את הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ וענה כמה נקודות חיתוך יש לפונקציות f(x) ו g(x) נמק.



6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{ax^2-4}}{ax-b}$

א. הישר $y=1$ הוא האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$. $(a,b>0)$.

3 האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ ויצר y יוצרים ברביע הראשון מלבן

ששטחו 14 יח"ר. מצאו את הפרמטרים b ו $-a$.

הציבו $a=1$ $b=7$:.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו:

(1) תחום ההגדרה.

(2) נקודות קיצון וסוגן. (אם יש כאלה)

(3) נקודות חיתוך עם הצירים. (אם יש כאלה)

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$.

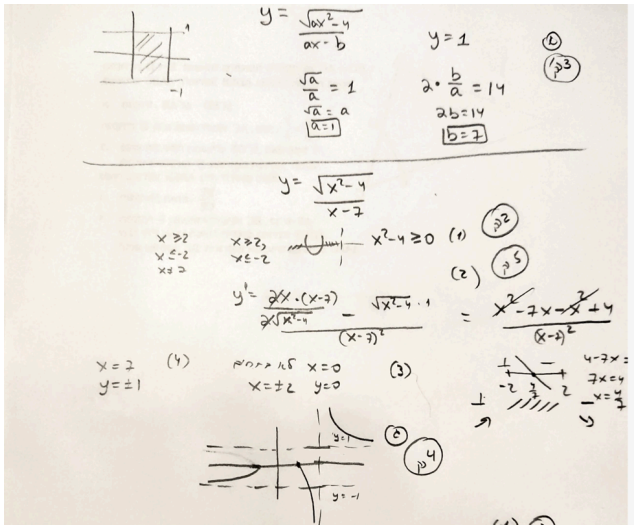
ד. נתונה פונקציה חדשה: $g(x)=-|f(x+1)|$

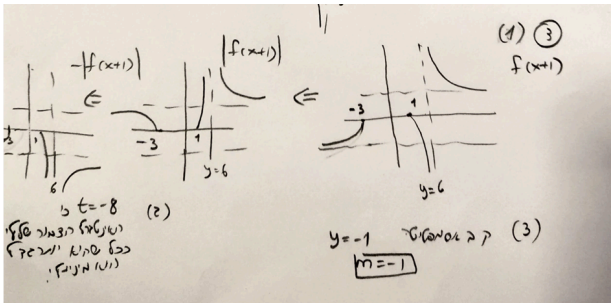
(1) שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ במערכת צירים חדשה. נמקו

(2) עבור איזה ערך של t הביטוי: $\int_{-8}^{t}g(x)dx$ $(-8\le t\le -3)$

יהיה מינימלי?

(3) נתון שלמשוואה: $g(x)=m$ יש פתרון יחיד. מצאי את ערכו של m.





שאלה 7:

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sin^2(x) + b\cos(4x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$, a ו- b פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

א. הבע את a באמצעות b .

נתון שנקודת הקיצון שלעיל היא $(\frac{\pi}{3}, 7)$.

ב. מצא את b ואת a .

הצב את $a = 8,\ b = -2$ וענה על הסעיפים הבאים:

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ה. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון (לפונקציה $f(x)$ יש בדיוק 3 נקודות פיתול).

ו. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)\,dx$

(2) מצא את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x והישרים $x = \frac{\pi}{3}$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$.

0

א

ארכימדס מבחן 24

8. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x^2-ax+a^2}{x^2}$ ו: $g(x)=\frac{a-x}{x}$ $(0<a)$.

א. היעזרו בפרמטר a, במידת הצורך ומצאו עבור כל אחת מהפונקציות את:

1. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן, אם יש כאלה.
3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.

ב. קבעו האם הגרפים של הפונקציות נחתכים זה עם זה. נמקו.

ג. שרטטו סקיצות של הגרפים של הפונקציות באותה מערכת צירים ברביעים הראשון והרביעי בלבד.

ד. הנקודות M ו-N נמצאות ברביעים אלו על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה, כך שהישר MN מקביל לציר ה-y. חשבו את אורכו המינימלי האפשרי של הישר MN.

$g(x)=\frac{a-x}{x}$

$y=-1 \quad x=0$

$g'(x)=\frac{-1\cdot x-(a-x)}{x^2}=\frac{-x-a+x}{x^2}$

$a-x=0$ ③

$\boxed{x=a}$

$f(x)=\frac{x^2-ax+a^2}{x^2}$

$y=1 \quad x=0$ ① ② 2

$f'=\frac{(2x-a)x^2-(x^2-ax+a^2)\cdot 2x}{x^4}$ 6

$f'(x)=\frac{-ax^2+2ax^2-2a^2x}{x^4}$

$ax^2-2a^2x=0$

$ax(x-2a)=0$

$x=0 \quad x=2a$

min

$x=2a$

$y=\frac{3a^2}{4a^2}=\frac{3}{4}$

$x^2-ax+a^2=0$

$x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-4a^2}$

$a>0$

y' סימן

$+ \; 0 \; - \; 2a \; +$

$\nearrow \; \searrow \; \nearrow$

③

$\frac{x^2-ax+a^2}{x^2}=\frac{a-x}{x} \quad / \cdot x^2$ ②

$x^2-ax+a^2=ax-x^2$

$2x^2-2ax+a^2=0$

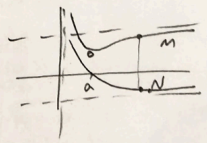
$x_{1,2}=2a\pm\sqrt{4a^2-8a^2}$ ×

אין פתרון

$F(x)=\frac{x^2-ax+a^2}{x^2}-\frac{a-x}{x}$ ②

$F(x)=\frac{x^2-ax+a^2-ax+x^2}{x^2}$

$F(x)=\frac{2x^2-2ax+a^2}{x^2}$



$F'(x)=\frac{(4x-2a)x^2-(2x^2-2ax+a^2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-2ax^2+4ax^2-2a^2x}{x^4}$

$2ax^2-2a^2x=0$

$2ax(x-a)=0$

$x=0 \quad x=a$

$+ \; 0 \; - \; a \; +$

$\nearrow \; \searrow \; \nearrow$

$F(a)=\frac{2a^2-2a^2+a^2}{a^2}=1$