

מתוך המתוכנת של יעל נמט

1. יוסף יצא רכוב על אופנוע מתל אביב במהירות קבועה. 30 דקות לאחר מכן, יצאה שולמית במכוניתה, גם כן מתל אביב, בכיוונו של יוסף, אך במהירות הגדולה ב-25% מזו של יוסף. כעבור t שעות מרגע יציאתו של יוסף, יצא ברק, גם כן מתל אביב, ונסע במכוניתו בכיוון הנסיעה של יוסף ושולמית. מהירותו של ברק גדולה פי 1.5 ממהירותו של יוסף. ברק השיג את יוסף ושולמית באותו הזמן. א. מצאו את t .
- ב. יוסף, שולמית, וברק נסעו כולם לחדונת חברים בחדרה במרחק של 60 ק"מ מתל אביב. לאחר שברק הגיע למקום החופה, נזכר ששכח את המתנה בבית, ולכן החל לחזור לכיוון תל-אביב. ידוע כי כאשר הגיע יוסף לחופה, ברק היה במרחק של 48.75 ק"מ מתל-אביב. מצא את המהירות של יוסף.
- ג. כשברק השיג את יוסף ושולמית השעה הייתה 11:00. באיזו שעה (אחרי 11:00) היה המרחק בין יוסף וברק 3.75 ק"מ? הבחן בין שתי אפשרויות.

Diagram showing a road with points A and B. A car is moving from A to B, and a motorcycle is moving from B to A. The distance between A and B is 60 km.

מכונית	מהירות	מרחק	שעה
יוסף	x	y	t
שולמית	$1.25x$	$y - \frac{1}{2}$	$t - \frac{1}{2}$
ברק	$1.5x$	$y - t$	t

$y \cdot x = (y - \frac{1}{2}) \cdot 1.25x = 60$
 $\rightarrow y = (y - \frac{1}{2}) \cdot 1.25 \rightarrow y = 1.25y - 0.625 \rightarrow 0.25y = 0.625$
 $\rightarrow \boxed{y = 2.5}$

$y \cdot x = (y - t) \cdot 1.5x = 60$
 $\rightarrow y = (y - t) \cdot 1.5$
 $2.5 = (2.5 - t) \cdot 1.5 \rightarrow 2.5 = 3.75 - 1.5t \rightarrow 1.5t = 1.25$
 $\rightarrow \boxed{t = \frac{5}{6}}$

Diagram showing the meeting point between the motorcycle and the car. The motorcycle has traveled 11.25 km from B, and the car has traveled 48.75 km from A. The total distance between A and B is 60 km.

71.25	$1.5x$	$\frac{95}{2x}$	הכנסות
60	x	$\frac{60}{x}$	הוצאות

$$\Rightarrow \frac{60}{x} = \frac{95}{2x} + \frac{5}{6} \quad | \cdot 6x$$

$$360 = 285 + 5x$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

כמות המיחורים של יוניון היא 15 ק"מ

מתוך המתכונת של יעל גולשטיין

2. בסדרה חשבונית יש $1 + 2n$ איברים. סכום $1 + n$ האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום

n האיברים הראשונים בסדרה. נתון שהאיבר הראשון הוא שלילי.

1.1 מצאי את האיבר a_{n+1} .

2 קבעי האם הסדרה עולה או יורדת. נמקי.

ב. חשבי את הסכום של $1 + 2n$ האיברים של הסדרה.

ג. לכל איבר בסדרה הנתונה הוסיפו את המספר המציין את מקומו בסדרה (לאיבר

הראשון הוסיפו 1, לאיבר השני הוסיפו 2 וכו').

הסכום של הסדרה החדשה גדול ב-1891 מהסכום של הסדרה הנתונה.

$$\boxed{2} \quad N = 2n+1$$

$$\textcircled{1} \quad S_{n+1} = S_n \quad S_n + a_{n+1} = S_n$$

$$a_1 < 0 \quad a_{n+1} = 0$$

$\textcircled{2}$ a_{n+1} שווה לאפס סדרה חשבונית עולה עם האיבר הראשון a_1 והאיבר a_{n+1} ← סדרה $n/2$

$$\textcircled{3} \quad S_{2n+1} = \frac{2n+1}{2} [2a_1 + (2n+1-1)d] =$$

$$\textcircled{4} \quad = \frac{2n+1}{2} [2a_1 + 2nd] = (2n+1)(a_1 + nd) = (2n+1) \cdot 0 = 0$$

\downarrow
 $a_{n+1} = a_1 + nd = 0$

$$\textcircled{5} \quad a_1+1, a_2+2, a_3+3, \dots, a_{2n+1}+2n+1$$

$$a_1+1 + a_2+2 + a_3+3 + \dots + a_{2n+1}+2n+1 = 0 + 1891$$

$$\textcircled{4} \quad (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n+1}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 2n+1) = 1891$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2n+1 = 1891$$

$$\frac{2n+1}{2} [1 + 2n+1] = 1891$$

$$a_1 = 1$$

$$d = 1$$

$$\frac{2n+1}{2} [2n+2] = 1891$$

$$N = 2n+1$$

$$(2n+1)(n+1) = 1891$$

$$2n^2 + 2n + n + 1 - 1891 = 0$$

$$2n^2 + 3n - 1890 = 0$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 1890}}{2 \cdot 2}$$

$$\boxed{n = 30}$$

מס' האיברים בסדרה:

$$2 \cdot 30 + 1 = 61 \text{ איברים}$$

מתוך המתכונת של אילן רמתי

- בחוג למתמטיקה נערך מבחן בתחילת השנה ומבחן נוסף בסיום השנה. משנים קודמות ידוע כי 70% מהסטודנטים מצליחים במבחן הראשון. ידוע גם כי 80% מבין המצליחים במבחן הראשון, מצליחים גם במבחן השני. 91% מבין הסטודנטים בחוג מצליחים לפחות באחד משני המבחנים.
- א. בוחרים באקראי סטודנט למתמטיקה. ידוע שהוא נכשל במבחן הראשון. מהי ההסתברות שהצליח במבחן השני?
- ב. בוחרים באקראי 4 סטודנטים למתמטיקה. מהי ההסתברות שלפחות שלושה מהם יצליחו במבחן השני אם ידוע שנכשלו במבחן הראשון?
- ג. מספר התלמידים בחוג למתמטיקה הוא 50. תלמידים שהצליחו בשני המבחנים רשאים לנסות להתקבל למסלול ישיר לדוקטורט. 25% מהזכאים ניסו להתקבל. ידוע כי ההסתברות של תלמיד להתקבל היא 0.6. מה ההסתברות שיתקבל לכל היותר תלמיד אחד?

	A	A	
④	③	②	B
0.77	0.21	0.56	
④	③	②	\bar{B}
0.23	0.09	0.14	
1	0.3	0.7	

נשא 628

② $0.7 \cdot 0.8 = 0.56$
 $0.7 - 0.56 = 0.14$

③ $0.91 - 0.56 - 0.24 = 0.21$
 $0.3 - 0.21 = 0.09$

④ $0.56 + 0.21 = 0.77$
 $0.14 + 0.09 = 0.23$

.1c

$P(B|\bar{A}) = \frac{0.21}{0.3} = \frac{7}{10} = 0.7$

$(\binom{4}{3})(0.7)^3 \cdot 0.3 + (0.7)^4 = 0$

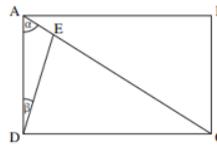
תלמידים 28
 $P(A \cap B) = 0.56$
 $0.56 \cdot 50 = 28$
תלמידים 28

25 ניסו להיגייג 7 תלמידים
 $(0.4)^7 + \binom{7}{1} \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^6 = 0.0188$ תלמידים 1 א 1

← תלמידים 0 התקבלו
תלמידים 7 התקבלו

מתוך מתכונת של עירוני ג

שאלה מתוך 2019 מועד ב



5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).
 נתון כי $\angle DAC = \alpha$,
 $\angle ADE = \beta$.
 R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.
 R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

והוכח כי היחס הזה שווה ל- $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$.

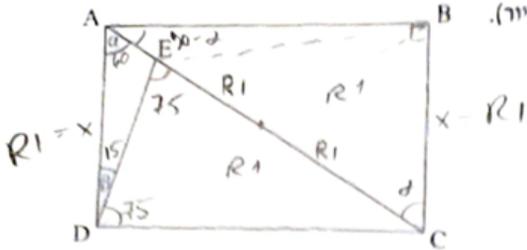
ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע באמצעות R_1 את צלעות המלבן DC ו-AB.

(3) הבע באמצעות R_1 את BE^2 והוכח כי $BE^2 = R_1^2(4 - \sqrt{3})$.



$\triangle ABC$: $\frac{x}{\sin(90-\alpha)} = 2R_1$

$\triangle ADE$: $\frac{x}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R_2$

$\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{x}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{x}$ (1)

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} < 2$ הנכח: $\alpha = \beta$ (2)

$\Rightarrow \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha} < 2 \Rightarrow \sin\alpha < 1$ \checkmark
 סיני נכחון אחיד מול התיקיה $\alpha = 90^\circ$
 זהו הישגני כולן

$\angle EDC = 75^\circ$ (הישגני 90°)
 $\angle E = 75^\circ$ (שוו - חיצוני - משפטים מול \angle שווה - חיצוני)
 (זה חיצוני - שווה)

$EC = DC$ (משפטים שווה - חיצוני - שווה)
 שני חיצוני - שווה שווה

$AD = R_1$

$\Leftrightarrow \frac{AD}{\sin 30} = 2R_1$

$DC = \sqrt{3}R_1$

$\Leftrightarrow \frac{DC}{\sin 60} = 2R_1$

$\triangle ECB$: $BE^2 = R_1^2 + (\sqrt{3}R_1)^2 - 2R_1(\sqrt{3}R_1)\cos 60$
 $BE^2 = R_1^2 + 3R_1^2 - 2\sqrt{3}R_1^2 \cdot \frac{1}{2}$

$DC = EC = \sqrt{3}R_1$

$$BE^2 = 4R_1^2 - \sqrt{3}R^2$$

$$BE^2 = R_1^2(4 - \sqrt{3})$$

נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2}$; $g(x) = \frac{a-x}{x}$ ($0 < a$).

א. היעורו בפרמטר a , במידת הצורך ומצאו עבור כל אחת מהפונקציות את:

1. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן, אם יש כאלה.
 3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.
- ב. קבעו האם הגרפים של הפונקציות נחתכים זה עם זה. נמקו.
- ג. שרטטו סקיצות של הגרפים של הפונקציות באותה מערכת צירים ברביעים הראשון והרביעי בלבד.
- ד. הנקודות M ו- N נמצאות ברביעים אלו על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה, כך שהישר MN מקביל לציר ה- y . חשבו את אורכו המינימלי האפשרי של הישר MN .

$g(x) = \frac{a-x}{x}$

$y = -1 \quad x = 0$

$g'(x) = \frac{-1 \cdot x - (a-x)}{x^2} = \frac{-x-a+x}{x^2} = \frac{-a}{x^2}$

$x > 0$ ימין

$a-x=0 \Rightarrow x=a$ (3)

$f(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2}$

$y = 1 \quad x = 0$ (2)

$f'(x) = \frac{(2x-a)x^2 - (x^2-ax+a^2) \cdot 2x}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-ax^2 + 2ax^2 - 2a^2x}{x^3}$

MIN $ax^2 - 2a^2x = 0$

$x=2a$ $ax(x-2a) = 0$

$y = \frac{3a^2}{4a} = \frac{3}{4}$

$x^2 - ax + a^2 = 0$

$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}$ אין מיני (3)

$\frac{x^2 - ax + a^2}{x^2} = \frac{a-x}{x} \quad / \cdot x^2$ (2)

$x^2 - ax + a^2 = ax - x^2$

$2x^2 - 2ax + a^2 = 0$ X

$x_{1,2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}$ אין מיני

$$F(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2} - \frac{a-x}{x}$$

$$F(x) = \frac{x^2 - ax + a^2 - ax + x^2}{x^2}$$

$$F(x) = \frac{2x^2 - 2ax + a^2}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{(4x - 2a)x^2 - (2x^2 - 2ax + a^2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2ax^2 + 4ax^2 - 2a^2x}{x^4}$$

$$2ax^2 - 2a^2x = 0$$

$$2ax(x - a) = 0$$

$$x = 0 \quad x = a$$

$$F(a) = \frac{2a^2 - 2a^2 + a^2}{a^2} = 1$$

שאלה 6: מתוך בני גורן עם שינויים

נתונה הפונקציה: $f(x) = a + \frac{b}{(2x-1)^3}$

א. מצא את תחומי העולה והירידה של הפונקציה (אם זה תלוי ב a או ב b . הבחן בין המקרים.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה (הבע באמצעות פרמטרים במידת הצורך)

ג. העבירו משיק בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x . משוואת המשיק היא $y = 12x - 12$ מצא את a ואת b

הצב: $a=2, b=-2$

ד. מצא את נקודות החיתוך הנוספות עם הצירים במידה והן קיימות ושרטט את גרף הפונקציה.

ה. על מנת לחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והישר $x=2$, כתוב את האינטגרל המתאים ובצע את פעולת האינטגרל (אין צורך להציב את הגבולות ולחשב את השטח)

ו. שרטט ללא חקירה נוספת את הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ וענה כמה נקודות חיתוך יש לפונקציות $f(x)$ ו $g(x)$ נמק.

$S = \int_1^2 12x^2 - 12 = (2 - \frac{2}{(2x-1)^3})$

$S = \int_1^2 (12x^2 - 12) dx = 2x^3 - 12x + \frac{12}{2x-1} \Big|_1^2$

$S = \int_1^2 (2x-1)^{-3} dx = \frac{(2x-1)^{-2}}{-2 \cdot 2} = -\frac{1}{4(2x-1)^2} \Big|_1^2$

א. שטחים מקוויקו עם השטחים היקוות
 ב. שטחים חיתוך עם השטחים
 1. אזור כגון יחסית מוגבל-עיקר
 0 " " " " 1

(2) $f'(x) = -3b \cdot \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)^6} \geq 0$

מה משמעות $b > 0$ או $b < 0$

$x \rightarrow \infty$
 $y \rightarrow a$
 $y = a$

$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(3) $f(x) = 2 - \frac{2}{(2x-1)^3}$
 $x=0 \Rightarrow y=4$
 $y=0 \Rightarrow 2 - \frac{2}{(2x-1)^3} = 0$
 $\frac{2}{(2x-1)^3} = 2 \Rightarrow (2x-1)^3 = 1 \Rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow x=1$

(4) $f'(x) = -\frac{6b}{(2x-1)^4}$
 (1) $f'(0) = 12 \Rightarrow -6b = 12 \Rightarrow b = -2$
 (2) $f(1) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$(2x-1) = 1$
 $2x = 2$
 $x = 1$

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2-4}}{ax-b}$

א. הישר $y = 1$ הוא האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ ($a, b > 0$).

3 האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה-y יוצרים ברביע הראשון מלבן

ששטחו 14 נק'ר. מצאו את הפרמטרים a ו- b .

$a = 1$ $b = 7$.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו:

(1) תחום ההגדרה.

(2) נקודות קיצון וסוגן. (אם יש כאלה)

(3) נקודות חיתוך עם הצירים. (אם יש כאלה)

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה פונקציה חדשה: $g(x) = -|f(x+1)|$

(1) שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ במערכת צירים חדשה. נמקו

(2) עבור איזה ערך של t הביטוי: $\int_{-8}^t g(x) dx$ ($-8 \leq t \leq -3$)

יהיה מינימלי?

(3) נתון שלמשוואה: $g(x) = m$ יש פתרון יחיד. מצאי את ערכו של m .

Handwritten work for problem 6. It shows the derivation of a and b from the asymptote $y=1$ and the area of a rectangle in the first quadrant. It includes the domain $x \geq 2$, the derivative of the function, and a graph of the function with its asymptotes.

Handwritten work for problem 3. It shows the transformation of the function $f(x)$ to $g(x) = -|f(x+1)|$ and the resulting graph. It includes the domain of $g(x)$ and the value of m for which there is a unique solution.

שאלה 7

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^2(x) + b \cos(4x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, a ו- b פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

א. הבע את a באמצעות b .

נתון שנקודת הקיצון שלעיל היא $(\frac{\pi}{3}, 7)$.

ב. מצא את b ואת a .

הצב את $a = 8$, $b = -2$ וננה על הסעיפים הבאים:

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ה. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון (לפונקציה $f(x)$ יש בדיוק 3 נקודות פיתול).

ו. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx$

(2) מצא את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x והישרים $x = \frac{\pi}{3}$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$.

א

ארכימדס מבחן 24

8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2}$; $g(x) = \frac{a-x}{x}$ ($0 < a$).

א. היעזרו בפרמטר a , במידת הצורך ומצאו עבור כל אחת מהפונקציות את:

1. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן, אם יש כאלה.
 3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.
- ב. קבעו האם הגרפים של הפונקציות נחתכים זה עם זה. נמקו.
- ג. שרטטו סקיצות של הגרפים של הפונקציות באותה מערכת צירים ברביעים הראשון והרביעי בלבד.
- ד. הנקודות M ו- N נמצאות ברביעים אלו על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה, כך שהישר MN מקביל לציר ה- y . חשבו את אורכו המינימלי האפשרי של הישר MN .

$$g(x) = \frac{a-x}{x}$$

$y = -1 \quad x = 0$

$$g'(x) = \frac{-1 \cdot x - (a-x)}{x^2} = \frac{-x-a+x}{x^2} = \frac{-a}{x^2}$$

$x \rightarrow \infty \rightarrow 0$

$$\frac{a-x}{x} = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$x = a$$

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2}$$

$y = 1 \quad x = 0 \quad \textcircled{1} \quad 2$

$$f' = \frac{(2x-a)x^2 - (x^2-ax+a^2) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-ax^2 + 2ax^2 - 2a^2x}{x^4}$$

Min

$$x = 2a \quad y = \frac{3a^2 - a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$$

$$ax^2 - 2a^2x = 0$$

$$ax(x-2a) = 0$$

$x = 0 \quad x = 2a$

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}$$

$a > 0$

$$\frac{x^2 - ax + a^2}{x^2} = \frac{a-x}{x} \quad \textcircled{2}$$

$$x^2 - ax + a^2 = ax - x^2$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad \times \quad \textcircled{5}$$

$$x_{1,2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}$$

$$F(x) = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2} = \frac{a-x}{x}$$

$$F(x) = \frac{x^2 - ax + a^2 - ax + x^2}{x^2}$$

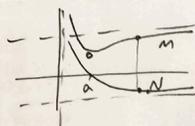
$$F(x) = \frac{2x^2 - 2ax + a^2}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{(4x-2a)x^2 - (2x^2-2ax+a^2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2ax^2 + 4ax^2 - 2a^2x}{x^4}$$

$$2ax^2 - 2a^2x = 0$$

$$2ax(x-a) = 0$$

$x = 0 \quad x = a$



$$F(a) = \frac{2a^2 - 2a^2 + a^2}{a^2} = 1$$