

Районная олимпиада 2005 год.

10 класс

1. Числа a, b, c, d различны, причем a и b удовлетворяют уравнению $x^2 - 2cx - 5d = 0$, а c и d удовлетворяют уравнению $x^2 - 2ax - 5b = 0$. Найдите $a + b + c + d$.
2. В окружности проведены две хорды AB и CD которые перпендикулярны и пересекаются в точке K . Пусть прямая, содержащая медиану KM треугольника BKD , пересекает AC в точке H . Докажите, что KH - высота треугольника AKC и найдите ее длину, если $AC=4$, $\sphericalangle CDB=30^\circ$
3. Решите неравенство: $|x^2 + 5x + 6| - |x - 2| > |x^2 + 3x - 4|$
4. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, разбивает его на треугольники с периметрами P_1 и P_2 . Вычислите периметр данного треугольника.
5. Шахматный король, начав с некоторого поля шахматной доски, обошел все остальные ее поля, побывав на каждом из них ровно по одному разу. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Какую наибольшую длину она может иметь, если сторона клетки шахматной доски равна 1? (Король ходит по обычным правилам)

Указания к решению задач.
10 класс

1. Ответ: 30

Согласно теореме Виета $a+b=2c$ (1)
 $ab=-5d$ (2)
 $c+d=2a$ (3)
 $cb=-5b$ (4)

Из (1) и (3) видно, что d, a, c, b в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, и можно положить:

$$d=u-3v, a=u-v, c=u+v, b=u+3v, \quad 4u=a+b+c+d, \quad v=\frac{a-d}{2} \neq c$$

Тогда равенства (2) и (4) перепишутся в виде:

$$(u-v)(u+3v) = -5(u-3v) \quad (5)$$

$$(u+v)(u-3v) = -5(u+3v) \quad (6)$$

Вычитая (6) из (5), после упрощения получим

$$4uv=30v, \text{ т.к. } v \neq 0, \text{ то } 4u=30, \text{ т.е. } a+b+c+d=30.$$

2. Ответ: $\sqrt{3}$

Пусть H -точка пересечения KM и AC .

$$\frac{1}{2}$$

1) $KM = \frac{1}{2} BD$. Значит $KM=BM=DM$,

2) $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle BKM = \sphericalangle AKH$,

3) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DKM = \sphericalangle CKH$

4) Из 2) и 3) следует, что

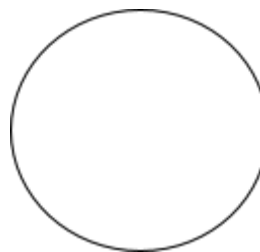
треугольники AKH и KCH подобные,

значит $\sphericalangle KHC = \sphericalangle CHK$. Но $\sphericalangle KHC + \sphericalangle AHC = 180^\circ$.

Тогда $\sphericalangle KHC = 90^\circ$. Значит KH -высота треугольника AKC .

$$5) \triangle AKC: AK = AC \cos \sphericalangle KAC = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3},$$

$$6) \triangle AKH: KH = AK \sin \sphericalangle KAH = 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = \sqrt{3}$$



3. : Ответ: $(0; +\infty)$

$$|x^2+5x+6| - |x-2| > |x^2+3x-4|$$

$$|x+2| \cdot |x+3| - |x-2| > |x+4| \cdot |x-1|$$

Границы промежутков знакопостоянства области определения

$$x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -4, x_5 = 1$$

$$\text{Если } x \leq -4, \text{ то } (-2-x)(-3-x)-(2-x) > (-4-x)(1-x), \quad x > -\frac{8}{3}; \quad -\frac{8}{3} \notin (-\infty; -4)$$

$$\text{Если } -4 < x \leq -3, \text{ то } x^2+5x+6+x-2 > -x^2-3x+4;$$

$$\begin{cases} 2x^2+9x > 0; \\ \begin{cases} x > 0, \\ x < -4,5; \\ -4 < x \leq -3; \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Если } -3 < x \leq -2, \text{ то } x < -12; \quad -12 \notin (-3; -2]$$

Если $-2 < x \leq 1$, то получим

$$\begin{cases} x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & x < -4,5; \\
 & -2 < x \leq 1; \qquad 0 < x \leq 1 \\
 & \text{Если } 1 < x \leq 2, \text{ то } (x+2)(x+3) - (-x+2) > (x+4)(x-1) \\
 & \begin{cases} x > -\frac{8}{3}; \\ 1 < x \leq 2; \end{cases} \qquad 1 < x \leq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Если } x > 2, \text{ то } (x+2)(x+3) - (x-2) > x^2 + 3x - 4 \\
 & \begin{cases} x > -12; \\ x > 2; \end{cases} \qquad x > 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (0; 1] \cup (1, 2] \cup (2; +\infty) = (0; +\infty)$$

$$4. \text{ Ответ: } P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}.$$

$$\text{Из подобия треугольников АСД и АВС имеем: } \frac{P_1}{P} = \frac{a}{c}.$$

$$\text{Из подобия треугольников СДВ и АСВ имеем: } \frac{P_2}{P} = \frac{a}{c}.$$

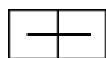
$$\frac{P_1^2}{P^2} = \frac{a^2}{c^2}; \qquad \frac{P_2^2}{P^2} = \frac{a^2}{c^2};$$

$$\frac{P_1^2 + P_2^2}{P^2} = \frac{a^2 + a^2}{c^2},$$

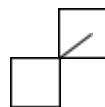
$$\text{Откуда } P^2 = P_1^2 + P_2^2; \qquad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}.$$

$$5. \text{ Ответ: } 14 + 49\sqrt{2}$$

Так как на шахматной доске 64 клетки и по условию король обошел все клетки, побывав в каждой ровно 1 раз, он сделал 63 хода. Ходы короля возможны только двух видов: 1) «короткие», если начальная и конечная клетки хода имеют общую сторону (см. рис а), длина такого хода равна 1 и 2) «длинные», если начальная и конечная клетки хода имеют общей только вершину (см. рис.б), длина такого хода равна $\sqrt{2}$.



а)



б)

Так как при «длинном» ходе король пересекает вершину общую четырем клеткам доски, и каждую такую вершину он может пересечь не более одного

раза (по условию путь короля не имеет самопересечений), то «длинных» ходов короля не более числа вершин, общих четырём клеткам доски, т.е. не более 49.

Следовательно, длина ломаной не более $49\sqrt{2} + (63-49) = 49\sqrt{2} + 14$