ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ

Η σχέση που περιγράφει με μαθηματικούς όρους τα φαινόμενο είναι η

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi) \rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi) \rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\varphi),\ \lambda_C \equiv \frac{h}{mc}$$

όπου λ' το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης δέσμης, λ το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης, m η μάζα του ηλεκτρονίου και φ η γωνία μεταξύ προσπίπτουσας και σκεδαζόμενης δέσμης. Η ποσότητα $\lambda_C \equiv \frac{h}{mc}$ προφανώς έχει διαστάσεις μήκους συμβολίζεται με λ_C και ονομάζεται **μήκος κύματος (ή μετατόπιση) Compton** (του ηλεκτρονίου).

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{6,626\cdot10^{-34}\ J\cdot s}{9,109\cdot10^{-31}\ kg\cdot 2,998\cdot10^{8}\ m/s} = 0,243\cdot10^{-11}\ m = 0,00243\ nm = 0,0243\ \text{Å} = 2,43\ pm$$

λ_C = 2,4·10^{-2} Å = 2,4·10^{-12} m = 2,4 pm → $f_C = \frac{c}{\lambda_C}$ = ·10^{20} Hz ≈ ^{20} Hz

Συμπεράσματα από την $\Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\varphi)$

1. Η μετατόπιση $\Delta\lambda$ είναι

   1. ανεξάρτητη του μήκους κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας για κάθε γωνία σκέδασης φ. Δηλ. όλες οι ακτινοβολίες υπό την ίδια γωνία φ θα υφίστανται την ίδια αύξηση (μετατόπιση).

   2. αύξουσα συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του φωτονίου για κάθε λ της προσπίπτουσας. Δηλ. η μετατόπιση (αύξηση) του μήκους κύματος της προσπίπτουσας μονοχρωματικής ακτινοβολίας θα είναι μεγαλύτερη, αν η παρατήρησή της σκεδαζόμενης γίνει υπό μεγαλύτερη γωνία και κατ' ακολουθία και το μήκος κύματος της παρατηρούμενης.

   Γίνεται ίση με $\Delta\lambda = \lambda_C = 2,43\ pm$ αν παρατηρηθεί υπό γωνία $\varphi = \pi/2$ και μέγιστη $(\Delta\lambda)_{\max} = 2\lambda_C = 4,86\ pm$ αν υπό γωνία $\varphi = \pi$.

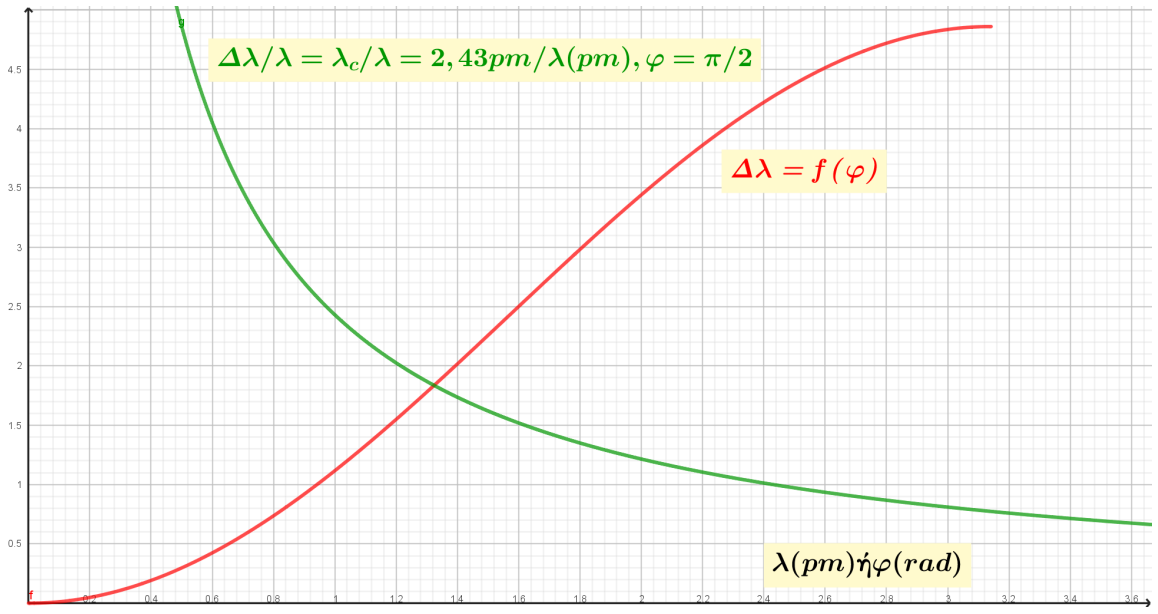
2. Από την ποσοστιαία μεταβολή του μήκους κύματος είναι $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda}(1-\cos\varphi)$ συνάγεται ότι

   1. Για κάθε φ είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ της προσπίπτουσας.

Άρα αν $\lambda \gg \lambda_C$ (πολύ μικρή συχνότητα) η ποσοστιαία μεταβολή θα είναι πολύ μικρή και η μεταβολή του μήκους κύματος ανεπαίσθητη. Στην περίπτωση όμως που το λ είναι συγκρίσιμο με το λ_C τότε η μεταβολή του μήκους κύματος είναι παρατηρήσιμη.

2. Για κάθε προσπίπτουσα λ είναι αύξουσα συνάρτηση της γωνίας σκέδασης φ.

Με δεδομένο ότι στην παρατηρούμενη δέσμη συνυπάρχουν το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο μήκος κύματος, η διάκρισή τους θα είναι εύκολη μόνο αν η ποσοστιαία μετατόπιση είναι μερικές εκατοστιαίες μονάδες, όπως στο παράδειγμα με την ακτίνα γ ή Χ. Δηλ. αν η μετατόπιση είναι $\Delta\lambda = \lambda_C = 2,43\ pm$, (η μέγιστη είναι $4,86\ pm$) τότε ο διαχωρισμός των ακτινοβολιών, είναι εμφανής αν η προσπίπτουσα έχει μήκος κύματος της ίδιας τάξης μεγέθους, δηλ. pm ή Å



Σχήμα 1: Η κόκκινη αποδίδει τη μετατόπιση (μεταβολή μήκους κύματος) Compton σε συνάρτηση της γωνίας σκέδασης φ. Η πράσινη την ποσοστιαία μεταβολή του μήκους κύματος για κάθετη σκέδαση (αν πρέπει η διαφορά να είναι συγκριτικά μεγάλη για να ξεχωρίζουν τα μήκη κύματος, προσπίπτοντος και σκεδαζόμενου, πρέπει να επιλέγουμε μικρά μήκη κύματος (μεγάλες συχνότητες)

3. Η ενέργεια που μεταφέρεται στο ηλεκτρόνιο (ως κινητική, ας μην ξεχνάμε ότι και όταν ήταν ακίνητο είχε την ενέργεια ηρεμίας του η οποία προσαυξήθηκε με την κινητική του) ισούται με τη διαφορά των ενεργειών των δύο φωτονίων (το τμήμα της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου που εμφανίζεται ως ενέργεια του ηλεκτρονίου). Αυτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta E_e = K_e = h\left(f - f'\right) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = hc\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda\left(\lambda + \Delta\lambda\right)} = \frac{hc}{\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} + \lambda}$$

$$\forall \varphi\left(\text{για } \Delta\lambda = \quad\right) \to \Delta E_e = K_e = f\left(\lambda\right)\downarrow$$

$$\forall \lambda\left(\text{αν } \varphi\uparrow \Rightarrow \Delta\lambda\uparrow\right) \to \Delta E_e = K_e = f\left(\varphi\right)\uparrow$$

από την οποία φαίνεται ότι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου

1. Για κάθε φ είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ (για την ίδια φ η μετατόπιση είναι ίδια)
2. Για κάθε λ θα είναι αύξουσα συνάρτηση της γωνίας φ (για μεγαλύτερες φ η μεταφορά ενέργειας στο ηλεκτρόνιο θα είναι μεγαλύτερη)

4. Το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου που μεταφέρεται ως κινητική ενέργεια στο ηλεκτρόνιο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{\Delta E_e}{E_\lambda} = \frac{h\left(f - f'\right)}{hf} = 1 - \frac{f'}{f} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} + 1} \to$$

$$\forall \varphi\left(\text{για } \Delta\lambda = \quad\right) \to \frac{\Delta E_e}{E_\lambda} = f\left(\lambda\right)\downarrow$$

$$\forall \lambda\left(\text{αν } \varphi\uparrow \Rightarrow \Delta\lambda\uparrow\right) \to \frac{\Delta E_e}{E_\lambda} = f\left(\varphi\right)\uparrow \quad \left[\text{για } \varphi = \pi/2 \to \frac{\Delta E_e}{E_\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda + \lambda_C}\right]$$

από την οποία φαίνεται ότι το ποσοστό

1. Για κάθε φ είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ (για την ίδια φ η μετατόπιση $\Delta\lambda$ είναι ανεξάρτητη του λ) δηλ. για μεγαλύτερα λ (μικρότερες συχνότητες) το ποσοστό θα είναι μικρότερο
2. Για κάθε λ θα είναι αύξουσα συνάρτηση της γωνίας φ (για το ίδιο λ το Δλ αύξουσα συνάρτηση της φ).

ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ

Παρατήρηση1η

Από τις δύο σχέσεις της διατήρησης της ορμής μπορεί να προκύψει σχέση που συνδέει τις δύο γωνίες σκέδασης ηλεκτρονίου θ και φωτονίου φ.

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cos\varphi+\gamma m_e\upsilon\cos\theta\\ 0=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\varphi-\gamma m_e\upsilon\sin\theta\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{l}\gamma m_e\upsilon\cos\theta=h\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\cos\varphi\right)\\ \gamma m_e\upsilon\sin\theta=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\varphi\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{\lambda'}\sin\varphi}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\varphi}=\frac{\frac{1}{\lambda'}\sin\varphi}{\frac{\lambda'-\lambda\cos\varphi}{\lambda\lambda'}}=\frac{\lambda\sin\varphi}{\lambda'-\lambda\cos\varphi}=\frac{\lambda\sin\varphi}{\lambda+\lambda_C(1-\cos\varphi)-\lambda\cos\varphi}=$$

$$\frac{\lambda\sin\varphi}{\lambda(1-\cos\varphi)+\lambda_C(1-\cos\varphi)}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_C}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_C}\frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\sin^2(\varphi/2)}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_C}\cot(\varphi/2)$$

$$\tan\theta=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_C}\cot(\varphi/2)\quad(\text{αν }\varphi=\pi\rightarrow\theta=0)$$

Παρατήρηση 2η

Η ενέργεια του φωτονίου της σκεδασμένης δέσμης σε συνάρτηση με την ενέργεια του φωτονίου της προσπίπτουσας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{E'}{E}=\frac{f'}{f}=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\lambda}{\lambda+\frac{h}{mc}(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{1+\frac{h}{mc\lambda}(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{1+\frac{h(c/\lambda)}{mc^2}(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{1+\frac{E}{mc^2}(1-\cos\varphi)}\rightarrow$$

$$\boxed{E'=\frac{E}{1+\frac{E}{mc^2}(1-\cos\varphi)}}$$

Ομοίως για την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε συνάρτηση της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου από προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\frac{K_e}{E}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}=\frac{(\Delta\lambda/\lambda)}{1+(\Delta\lambda/\lambda)}\rightarrow\boxed{K_e=E\frac{(\Delta\lambda/\lambda)}{1+(\Delta\lambda/\lambda)}}$$

1. $\text{αν }\Delta\lambda/\lambda\gg 1\rightarrow K_e\approx E$ που σημαίνει ότι όλη η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου μεταφέρθηκε ως κινητική στο ηλεκτρόνιο, δηλ. ουσιαστικά το προσπίπτον φωτόνιο απορροφήθηκε από το ηλεκτρόνιο. χωρίς επανεκπομπή φωτονίου. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν $\lambda_C\gg\lambda\rightarrow\lambda\approx 2,4\,pm10\,f\approx 10^{20}\,Hz$, δηλ. όταν το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου είναι πολύ μικρότερο του μήκους κύματος Compton (πολύ μεγαλύτερη συχνότητα). Στην ελαστική μετωπική σύγκρουση το κινούμενο σωματίδιο έχει την ίδια μάζα με το ακίνητο.

2. $\text{αν }\Delta\lambda/\lambda\ll 1\rightarrow K_e\ll E$ που σημαίνει ότι πολύ μικρό μέρος της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου μεταφέρθηκε ως κινητική στο ηλεκτρόνιο ή αλλιώς το φωτόνιο της σκεδασμένης έχει την ίδια

περίπου ενέργεια με το φωτόνιο της προσπίπτουσας. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν $\lambda_C \gg \lambda \rightarrow \lambda \gg 2,4\,pm \rightarrow 10\,f \gg 10^{20}\,Hz$, δηλ. όταν το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου είναι πολύ μεγαλύτερο του μήκους κύματος Compton (πολύ μικρότερη συχνότητα). Στην ελαστική μετωπική σύγκρουση το κινούμενο σωματίδιο έχει πολύ μικρότερη μάζα σε σχέση με το ακίνητο (πχ ελαστική κρούση σε τοίχο δίνει ανάκλαση με την ίδια κινητική ενέργεια).

Παρατήρηση 3η

Η ίδια θεωρία περιγράφει οποιοδήποτε γεγονός κατά το οποίο φωτόνιο σκεδάζεται από ένα ελεύθερο φορτισμένο σωματίδιο (σκέδαση Compton) πχ ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο, ιόν,…

Παρατήρηση 4η

Ένα φωτόνιο δε μπορεί να απορροφηθεί (να μεταφέρει όλη την ενέργειά του) από ένα ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο, διότι τότε παραβιάζεται η ΑΔΕ.

Αν το ηλεκτρόνιο μπορούσε να απορροφήσει ένα φωτόνιο

τότε η ορμή του φωτονίου γίνεται ορμή του ηλεκτρονίου το οποίο θα κινηθεί στην κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου.

$$hf / c = p'_e \rightarrow p'^2_e c^2 = (hf)^2$$

και η ενέργειά του θα προστεθεί στην ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου και θα γίνει η ενέργειά του μετά την απορρόφηση

$$hf + mc^2 = E'_e$$

Τα προηγούμενα πρέπει να συμβατά στη σχέση $E'^2 = p'^2 c^2 + m^2 c^4$

$$(hf + mc^2)^2 = (hf)^2 + m^2 c^4 \rightarrow hfmc^2 = 0 \text{ άτοπο } f = 0 \ (\quad)$$

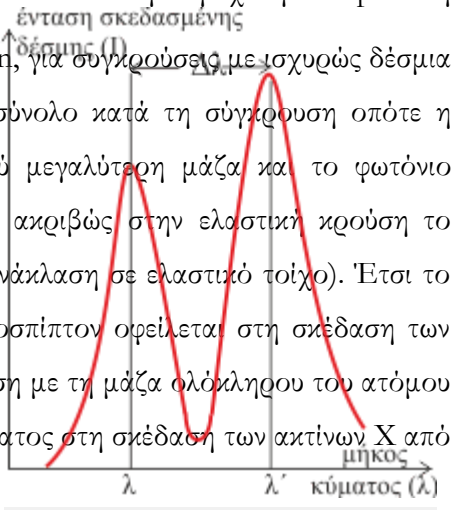
Άρα φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δε μπορεί να συμβεί για τελείως ελεύθερα ηλεκτρόνια. Δηλ. τα ηλεκτρόνια πρέπει να περιορίζονται σε ένα στερεό ή σε ένα άτομο.

Παρατήρηση 5η : Το μήκος κύματος Compton βρίσκεται μεταξύ του μεγέθους ενός ατόμου $\gg 10^{-10}\ m$ και ενός πυρήνα $\gg 10^{-14}\ m$. Ένα φωτόνιο με μήκος κύματος όσο το μήκος κύματος Compton θα είχε ενέργεια

$$E = hf_C = h\frac{c}{\lambda_C} = h\frac{c}{\frac{h}{mc}} = mc^2 = 0,511\ MeV$$

Δηλ όση είναι η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου.

Παρατήρηση 6η : Η μονοχρωματική ακτινοβολία Χ εκτρεπόταν από ηλεκτρόνια προς όλες τις διευθύνσεις γύρω από την αρχική διεύθυνση. Ο Compton μετρούσε την ένταση και το μήκος κύματος της σκεδασμένης ακτινοβολίας σε διάφορες διευθύνσεις (γωνίες φ εκτροπής). Για κάθε φ εύρισκε ότι η σκεδασμένη ακτινοβολία αποτελείται από δύο συνιστώσες, δύο μέγιστα της έντασης, ένα που αντιστοιχούσε σε αυξημένο λ και ένα μικρότερου ύψους που αντιστοιχούσε στο αρχικό μήκος κύματος (πρώτο μέγιστο της έντασης της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας). Ενώ το μεγαλύτερο μήκος κύματος αποδόθηκε, σύμφωνα με την προηγούμενη μελέτη, στη σύγκρουση φωτονίου με «ελεύθερα ακίνητα» ηλεκτρόνια του στόχου, πως μπορεί να ερμηνευτεί και η ύπαρξη του αρχικού μήκους κύματος; Αυτό μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε σύγκρουση φωτονίου με ιοντικό πυρήνα μέσα στο σκεδαστή. Κατ' αυτές τις συγκρούσεις αν και τα ισχυρώς δέσμια ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται ως ελεύθερα (μικρές ενέργειες συγκριτικά με την ενέργεια των φωτονίων Χ), η (ενεργός) μάζα τους είναι πολύ μεγαλύτερη (για τον άνθρακα του γραφίτη θα είναι περίπου όση και η μάζα του πυρήνα) $M = 12 \times 1840 m_e = 22000\ m_e$). Με αντικατάσταση στη σχέση Compton τη μάζα του ηλεκτρονίου με την Μ βλέπουμε ότι η μετατόπιση Compton, για συγκρούσεις με ισχυρώς δέσμια ηλεκτρόνια, είναι πολύ μικρή. Ο ιοντικός πυρήνας αναπηδά σα σύνολο κατά τη σύγκρουση οπότε η σύγκρουση λογίζεται ότι γίνεται με όλο το άτομο που έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα και το φωτόνιο ανακρούεται) χωρίς αλλαγή μήκους κύματος και ενέργειας (όπως ακριβώς στην ελαστική κρούση το κινούμε σωματίδιο συγκρούεται με σώμα πολύ μεγάλης μάζας, πχ ανάκλαση σε ελαστικό τοίχο). Έτσι το μέρος της ανακλασμένης δέσμης με μήκος κύματος ίσο με το προσπίπτον οφείλεται στη σκέδαση των ακτίνων Χ από ισχυρώς δέσμια ηλεκτρόνια που έχουν ενεργό μάζα ίση με τη μάζα ολόκληρου του ατόμου (σκέδαση από όλο το άτομο), ενώ το μέρος με αυξημένο μήκος κύματος στη σκέδαση των ακτίνων Χ από ελεύθερα ηλεκτρόνια του στόχου.



Άσκηση

Για τρεις διαφορετικές ΗΜ ακτινοβολίες δίνονται τα μήκη κύματός τους

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \text{μικρού μήκους κύματος } \left(\quad \right) \\ \text{ακτίνες X } \left(1\ \text{Å} \quad 10 \right) \\ \text{μεγάλου μήκους κύματος } \left(\quad \right) \end{array} \right\} \left(\quad = \quad m \right)$$

1. Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες συχνότητες και τις ενέργειες σε eV των φωτονίων των δοσμένων ακτινοβολιών.

Δίνονται: $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$ και ότι η ενέργεια ενός φωτονίου μπορεί να υπολογιστεί εύκολα σε eV από τη σχέση $E(eV) = \frac{12.480}{\lambda(\text{Å})}$ αν το μήκος κύματος δίνεται σε Å.

Απάντηση

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \text{μικρού μήκους κύματος } \left(\quad \right) \\ \text{ακτίνες X } \left(\quad \right) \\ \text{μεγάλου μήκους κύματος } \left(\quad \right) \end{array} \right\} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3 \cdot 10^8 \ m/s}{1,2 \times 10^{-2} \ \text{Å}} = 2,5 \cdot 10^{20} \ Hz \\ \frac{3 \cdot 10^8 \ m/s}{60 \times 10^{-2} \ \text{Å}} = \quad \cdot \quad ^{18} \ Hz \\ \frac{3 \cdot 10^8 \ m/s}{48 \times 10^2 \ \text{Å}} = 6,25 \cdot 10^{14} \ Hz \end{array} \right\}$$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \text{μικρού μήκους κύματος } \left(\quad \right) \\ \text{ακτίνες X } \left(\quad \right) \\ \text{μεγάλου μήκους κύματος } \left(\quad \right) \end{array} \right\} \rightarrow E(eV) = \frac{12.480}{\lambda(\text{Å})} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{12.480}{1,2 \times 10^{-2} \ \text{Å}} = 1,04 \ MeV \\ \frac{12.480}{60 \times 10^{-2} \ \text{Å}} = \quad keV \\ \frac{12.480}{48 \times 10^2 \ \text{Å}} = 2,6 \ eV \end{array} \right\}$$

2. Αν οι προηγούμενες ακτινοβολίες χρησιμοποιηθούν στο φαινόμενο Compton υπολογίστε τη μετατόπιση Compton (μεταβολή του μήκους κύματος ανάμεσα στην σκεδαζόμενη και στην προσπίπτουσα ακτινοβολία) αν η γωνία σκέδασης είναι $\varphi = 90^0$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Δίνεται ότι $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,4 \cdot 10^{-2} \ ^0$ (μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου)

Απάντηση

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\left(1-\cos 90^0\right) = \frac{h}{mc} = \lambda_C \approx 2,4\cdot 10^{-2}\ ^0$$ η ίδια για όλα τα μήκη κύματος και ίση με το μήκος κύματος Compton.

3. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας υπό $\varphi = 90^0$ και την ποσοστιαία μεταβολή της προσπίπτουσας για τις αναφερόμενες περιπτώσεις. Ποια από τις τρεις θα επιλέγατε για τη μελέτη του φαινομένου Compton;

Απάντηση

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \text{ακτίνα } \gamma & \lambda' = \lambda + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} = 0,5\lambda_C \quad (\lambda = 1,2\cdot 10^{-2}\ \text{Å}) \\ \text{ακτίνα X} & \lambda' = \lambda + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} = 25\lambda_C \quad (\lambda = 60\cdot 10^{-2}\ \text{Å}) \\ \text{ορατό φως} & \lambda' = \lambda + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} = 2\cdot 10^5\lambda_C \quad (\lambda = 48\cdot 10^2\ \text{Å}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = 1,2\cdot 10^{-2}\ \text{Å} + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} = 3,6\cdot 10^{-2}\ \text{Å} \\ \lambda' = 60\cdot 10^{-2}\ \text{Å} + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} = 62,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} \\ \lambda' = 48\cdot 10^2\ \text{Å} + 2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å} \approx 48\cdot 10^2\ \text{Å} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å}}{1,2\times 10^{-2}\ \text{Å}} = 2 \ \acute{\eta}\ 200\% \\ \dfrac{2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å}}{60\times 10^{-2}\ \text{Å}} = 0,04 \ \acute{\eta}\ 4\% \\ \dfrac{2,4\cdot 10^{-2}\ \text{Å}}{48\times 10^{2}\ \text{Å}} = 5\cdot 10^{-6} \ \acute{\eta}\ 5\cdot 10^{-4}\% = 0,0005\% \end{array} \right\}$$

Η επιλογή θα ήταν η ακτίνα γ ή η ακτίνα X αφού οι δύο ακτινοβολίες, προσπίπτουσα και σκεδαζόμενη, διαφέρουν σημαντικά και η παρατήρησή τους θα ήταν περισσότερο διακριτή.

4. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου κατά τη σκέδαση των προηγούμενων ακτινοβολιών υπό γωνία $\varphi = 90^0$ σε συνάρτηση του $m_e c^2$ (ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου).

Δίνεται: $\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} 0,5\lambda_C & (\text{ακτίνα } \gamma) \\ 25\lambda_C & (\text{ακτίνα X}) \\ 2\cdot 10^5\lambda_C & (\text{ορατό φως}) \end{array} \right\}$

Απάντηση

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου θα είναι ίση με τη διαφορά των ενεργειών των δύο φωτονίων

$$K_e = h\left(f - f'\right) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = hc\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda\left(\lambda + \Delta\lambda\right)} = hc\frac{\lambda_C}{\lambda\left(\lambda + \lambda_C\right)},\ \left(\varphi = 90^0\right)$$

$$K_e = hc\frac{\lambda_C}{\lambda\left(\lambda + \lambda_C\right)} = \left\{\begin{array}{l} hc\dfrac{\lambda_C}{0,5\lambda_C\left(0,5\lambda_C + \lambda_C\right)} = hc\dfrac{1}{0,75\lambda_C} = \dfrac{4}{3}\dfrac{hc}{h/mc} = \dfrac{4}{3}mc^2 = 1,33mc^2 \\ hc\dfrac{\lambda_C}{25\lambda_C\left(25\lambda_C + \lambda_C\right)} = hc\dfrac{1}{650\lambda_C} = \dfrac{1}{650}\dfrac{hc}{h/mc} = 0,0015mc^2 = 1,5\cdot10^{-3}mc^2 \\ hc\dfrac{\lambda_C}{2\cdot10^5\lambda_C\left(2\cdot10^5\lambda_C + \lambda_C\right)} \approx hc\dfrac{1}{4\cdot10^{10}\lambda_C} = 2,5\cdot10^{-11}\dfrac{hc}{h/mc} = 2,5\cdot10^{-11}mc^2 \end{array}\right\}$$

Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι το ηλεκτρόνιο αποκτά μεγαλύτερη ενέργεια αν η ακτινοβολία είναι μεγαλύτερης συχνότητας (μικρότερου μήκους κύματος).

Αλλά το ίδιο συμβαίνει και με την ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας στο ηλεκτρόνιο όπως φαίνεται και από τη σχέση:

$$\frac{\Delta E_e}{E_\lambda} = \frac{h\left(f - f'\right)}{hf} = 1 - \frac{f'}{f} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} + 1}.$$