ثانوية آبادي بوساليم رأس الوادي	وزارة التربية الوطنية اختبار الفصل الثاني – مادة الرياضيات -	الشعبة : علوم تجريبية المدة : 3 ساعات

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، تعطى النقط $A(1;-1;3)$ $B(0;3;1)$ $C(6;-7;-1)$ و $D(2;1;3)$.

1) أ- عين إحداثيات النقطة E مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=2\sqrt{21}$.

2) أ- بين أن النقط A,B و D تعين مستوياً.

ب- بين أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD) .

جـ-عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) .

3) أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC) .

ب- عين إحداثيات النقطة F تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD) .

4) بين أن **المستوي** (ABD) و (Γ) **متقاطعان** ، ثم حدد العناصر الأساسية **لمجموعة** تقاطعهما .

التمرين الثاني:

في المستوي المركب المنسوب إلي المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $2cm$)، نعتبر النقط A و B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2$ و $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I)1. أ- أكتب z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب- علم النقط A و B و C .

1) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

2) عين ، ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

II) 1) f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{-4}{z-2}$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

2- استنتج **صورتي** النقطتين B و C بالتحويل f .

جـ- نسمي G مركز ثقل المثلث OAB . عين ، ثم علم النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل f .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 2$: $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

ب- بين أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أرسم (γ) .

التمرين الثالث:

I) لتكن الدَالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1- عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- أ- أدرس تغيرات الدَالة g .

ب- **أحسب :** $g(-2)$ $g(0)$ $g(1)$ و $g(2)$.

جـ-شكل جدول تغيرات الدالة g .

3- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. نرمز بـ α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha < \beta$.

4- استنتج إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدَالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ، $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1- عين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين بيانيا .

2- أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدَالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3- أ- بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ ، (حيث α العدد المعرف في السؤال 3- من الجزء I) .

3- علما أن : $-1{,}16 < \alpha < -1{,}14$ و $1{,}83 < \beta < 1{,}85$ استنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

(تدور النتائج إلى 10^{-2}) . **ثم** أرسم (C_f) .

(III h الدالة المعرفة كما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

1- عين مجموعة تعريف الدالة h .

2- أ- أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$.

ب- استنتج إشارة $h'(x)$.

جـ-شكل جدول تغيرات الدالة h .

تصحيح اختبار الفصل الثاني

حل التمرين الأول

$A(1;-1;3)$ $B(0;3;1)$ $C(6;-7;-1)$ و $D(2;1;3)$.

1) أ- تعين إحداثيات النقطة E مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

لدينا :

$$\begin{cases} x_E=\dfrac{2x_A+(-1)x_B+1x_C}{2+(-1)+1}=\dfrac{2-0+6}{2}=4 \\ y_E=\dfrac{2y_A+(-1)y_B+1y_C}{2+(-1)+1}=\dfrac{-2-3-7}{2}=-6 \\ z_E=\dfrac{2z_A+(-1)z_B+1z_C}{2+(-1)+1}=\dfrac{6-1-1}{2}=2 \end{cases}$$

ومنه $E(4;-6;2)$

ب- استنتاج (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$.

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$ معناه $\left\|2\overrightarrow{ME}\right\|=2\sqrt{21}$ ومنه $ME=\sqrt{21}$

(Γ) سطح كرة مركزها E ونصف قطرها $R=\sqrt{21}$.

2) أ- تبيان أن النقط A,B و D تعين مستوياً.

A,B و D تعين مستوي إذا وفقط إذا كانت النقط A,B و D ليست في استقامية أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

لدينا : $x_{\overrightarrow{AB}}=-1x_{\overrightarrow{AD}}$ لكن $y_{\overrightarrow{AB}}\neq -1y_{\overrightarrow{AD}}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا.

بـ -تبيان أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD).

$(EC)\perp(ABD)$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{EC}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من (ABD)

لدينا : $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ، $\begin{cases}-1\times2+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=0\\1\times2+2\times(-1)+0\times(-3)=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ **إذن** $(EC)\perp(ABD)$

جـ-تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD).

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ **شعاع ناظمي لـ** (ABD) **و بالتالي** $(ABD):2x-y-3z+d=0$

$2\times0-1\times3-3\times1+d=0$ **معناه** $B(0;3;1)\in(ABD)$ **ومنه** $d=6$ **إذن** $(ABD):2x-y-3z+6=0$

3) أ- تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC).

(EC) **مستقيم يشمل النقطة** $E(4;-6;2)$ **و** $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ **شعاع توجيه له إذن :** $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-t\ /\ t\in\mathbb{R}\\z=-3-3t\end{cases}$

ب- تعيين إحداثيات النقطة F تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD).

نحل الجملة : $\begin{cases}\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-t\\z=2-3t\end{cases}\quad.....(1)\\2x-y-3z+6=0\end{cases}$ ، (1) تكافئ $2(4+2t)-(-6-t)-3(2-3t)+6=0$

(1) **تكافئ** $14t+14=0$ **أي** $t=-1$ **بالتعويض نجد** $F(2;-5;5)$.

4) تبيان أن **المستوي** (ABD) و (Γ) **متقاطعان** .

لدينا : $d(E;(ABD))=\dfrac{|2\times4-1\times(-6)-3\times2+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ و $d(E;(ABD))<R$ **إذن المستوي** (ABD) و (Γ) **يتقاطعان وفق دائرة** (C).

ملاحظة : بما أن $(EC)\perp(ABD)$ **و** $(ABD)\cap(EC)=\{F\}$ **فإن** $d(E;(ABD))=EF=\sqrt{14}$

- تحديد العناصر الأساسية لمجموعة التقاطع: مركز الدائرة (C) ، **النقطة** $F(2;-5;5)$.
- **حساب** r **نصف قطر الدائرة** (C) .

لدينا : $\left[d\left(E;(ABD)\right)\right]^2+r^2=R^2$ **ومنه** $\left(\sqrt{14}\right)^2+r^2=\left(\sqrt{21}\right)^2$ **إذن** $r=\sqrt{7}$.

حل التمرين الثاني

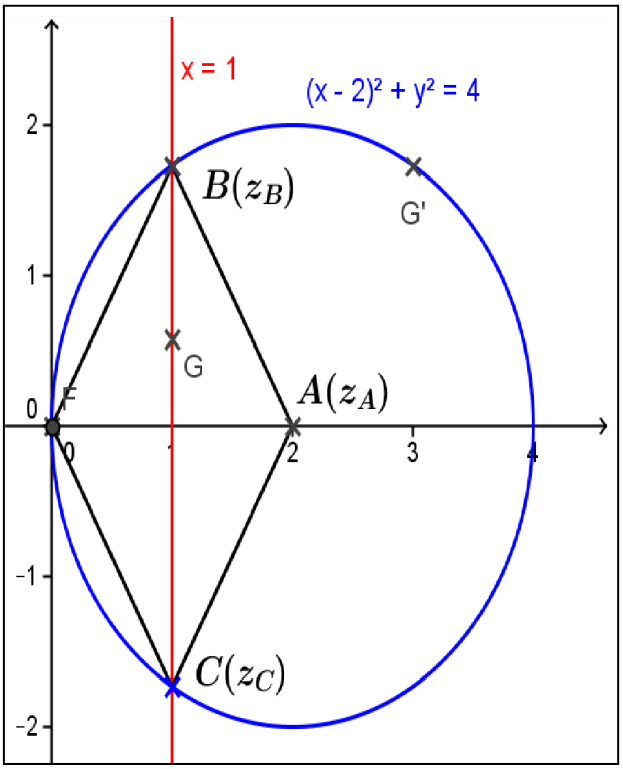
$z_A=2$ $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I)1. أ- كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي .

$$z_B=1+i\sqrt{3}=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C=1-i\sqrt{3}=\overline{z_B}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب- تعليم النقط A و B و C .



2

3) تعين طبيعة الرباعي $OBAC$.

لدينا : $z_{\overrightarrow{OB}}=z_{\overrightarrow{CA}}=1+i\sqrt{3}$ **معناه** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$ **إذن** $OBAC$ **متوازي أضلاع ، و** $OB=OC=2$ **معناه** $OBAC$ معين .

4) تعيين ، ثم أنشاء (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

لدينا $|z|=|z-2|$ **: تكافئ** $OM=AM$ **ومنه** (Δ) **المستقيم محور القطعة** $[OA]$.

II) 1) f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{-4}{z-2}$

-1 حل المعادلة : $z=\frac{-4}{z-2}$.

لدينا : $z=\dfrac{-4}{z-2}$ **تكافئ** $z^2-2z+4=0$ ، ($\Delta=-12$ ، $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{}$)

2- استنتاج صورتي النقطتين B و C بالتحويل f .

نلاحظ أن حلي المعادلة هي لاحقتا النقطتين B و C ، وبالتالي B و C نقتان صامدتان بالتحويل f .

ومنه $z_{B'}=z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_{C'}=z_C=1-i\sqrt{3}$.

جـ- G مركز ثقل المثلث OAB . تعين ، ثم علم النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل f .

لدينا : $z_G=\dfrac{z_0+z_A+z_B}{3}=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$ و بالتالي $z_{G'}=\dfrac{-4}{z_G-2}=\dfrac{-4}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i-2}=3+i\sqrt{3}=3z_G$

$z_{G'}=3z_G$ معناه $\overrightarrow{OG'}=3\overrightarrow{OG}$ و بالتالي النقط O ، G و G' في استقامية .

2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq 2$: $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

لدينا : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$ **تكافئ** $z'-2=\dfrac{-4}{z-2}-2$ **أي** $z'-2=\dfrac{-2z}{z-2}$ **ومنه** $|z'-2|=\left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|=\dfrac{|-2z|}{|z-2|}=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$

3- تبيان أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أرسم (γ) .

لدينا $|z|=|z-2|$ **: و** $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$ **ومنه** $|z'-2|=\dfrac{2|z-2|}{|z-2|}=2$ **إذن** $|z'-2|=2$ **أي** $OM'=2$

و بالتالي (γ) الدائرة ذات المركز $A(z_A)$ و نصف قطرها 2 .

التمرين الثالث

I) g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(2-x)e^x-1$

1- تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2e^x-xe^x-1\right]=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]=-\infty$$

2- أ-دراسة تغيرات الدَالة g .

المشتقة : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=(1-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-x)$

ب- $g(-2)=4^{-2}-1\simeq -0,46$ $g(0)=1$ $g(1)=e-1\simeq 1,71$ و $g(2)=-1$.

جـ- جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

3- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. نرمز بـ α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha<\beta$.

الدالة g مستمرة متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ ، و بالخصوص على المجال $[-2;0]$ و $g(-2)\times g(0)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]-\infty;1]$.

الدالة g مستمرة متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ ، و بالخصوص على المجال $[1\,;2]$ و $g(1)\times g(2)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في $[1;+\infty[$.

4- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ع/طيار

(II $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1-e^{-x}}{1+\left(-xe^{-x}\right)}\right]=1$ ($1-e^{-x}\to 1-0$, $-xe^{-x}\to 0$)

، المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)=0$ ($e^x-1\to -1$, $e^x-x\to +\infty$)

، المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

2- أ- المشتقة : **الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و**

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{-xe^x+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدَالة f

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(e^x-x\right)^2>0$ ، ومن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$f(\beta)$	↘	1

Tiar 7/03/2013

3- أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ ، (حيث α العدد المعرف في السؤال 3- من الجزء **I**) .

لدينا : $f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{e^\alpha-\alpha}$.....(1)

$g(\alpha)=0$ معناه $(2-\alpha)e^\alpha+1=0$ ومنه $\boxed{e^\alpha=\frac{1}{2-\alpha}}$.....(2)

من (1) و (2) (بالتعويض) نجد : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$

2- علما أن : $-1,16<\alpha<-1,14$ و $1,83<\beta<1,85$ استنتاج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

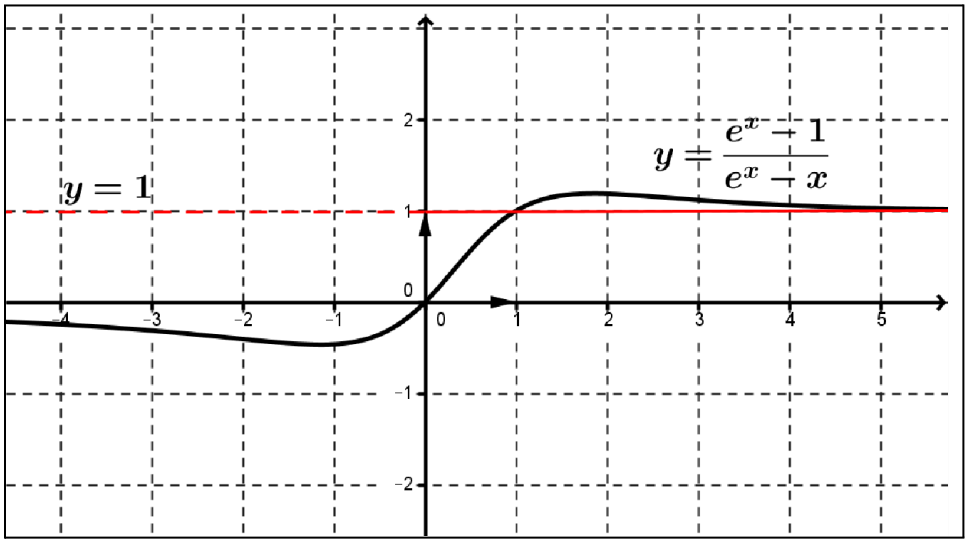
(تدور النتائج إلى 10^{-2}) .

لدينا : $-1,16<\alpha<-1,14$ بإضافة (-1) نجد $-2,16<\alpha-1<-2,14$

الدالة مقلوب متناقصة تماما على $\mathbb{R}_-^*$ ومنه $\frac{1}{-2,14}>\frac{1}{\alpha-1}>\frac{1}{-2,16}$ إذن $\boxed{-0,47<f(\alpha)<-0,46}$

بنفس الطريقة نجد: $\boxed{1,18<f(\beta)<1,20}$

الرسم:



(III $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1- تعين مجموعة تعريف الدالة h .

h **معرفة إذا وفقط إذا كان** $f(x)\neq 0$ أي $x\neq 0$ ومنه $D_h=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2- أ- حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$.

$$h'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم :

ب- استنتاج إشارة $h'(x)$.

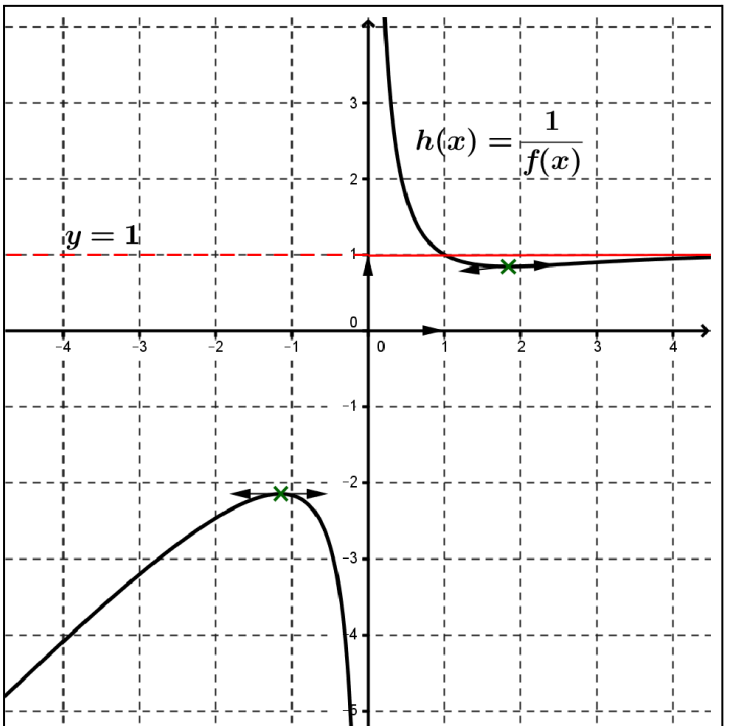
من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $[f(x)]^2>0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ من إشارة $[-f'(x)]$.

جـ جدول تغيرات الدَالة h .

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$ || $-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{f(\alpha)}$	↘ $-\infty$ || $+\infty$ ↘	$\frac{1}{f(\beta)}$	↗ 1

Tiar 7/03/2013

التمثيل البياني للدالة h



من إعداد الأستاذ

ع/طيار