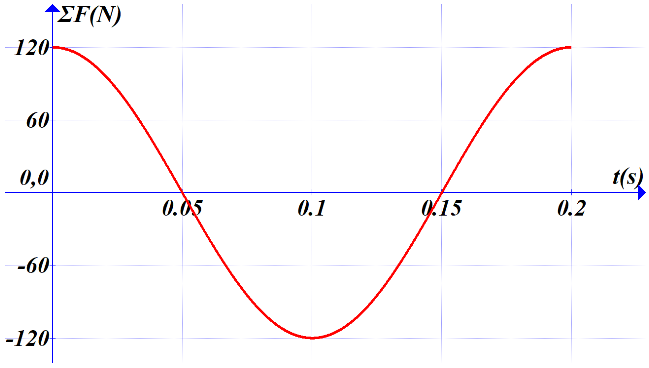
Από τηγραφική παράσταση της δύναμης…

Ένα υλικό σημείο μάζας $m = 0,4kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.). Η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



α) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης, το πλάτος της και να κάνετε τη γραφική παράσταση $\Sigma F \rightarrow x$, δηλαδή συνισταμένης δύναμης - θέσης σε βαθμολογημένους άξονες.

β) Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση ταχύτητας - χρόνου, κάνοντας τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

γ) Ποια είναι η χρονική διάρκεια μετάβασης του σώματος από τη θέση $x = +0,15m$με $\upsilon < 0$, στη θέση $x = -0,15\sqrt{3}m$ με $\upsilon > 0$ για πρώτη φορά;

δ)Τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση $x = +0,15\sqrt{2}m$ με $\upsilon > 0$ να βρείτε:

δ1) το ρυθμό μεταβολής της ορμής.

δ2) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Δίνεται $\pi^2 = 10$

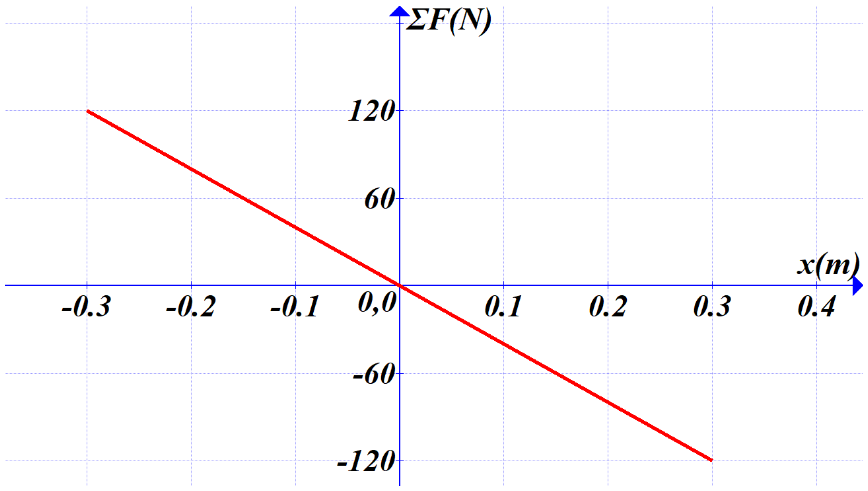
Απάντηση

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T = 0,2s$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi \frac{rad}{s}$. Ησταθερά επαναφοράς προκύπτει τότε

$$D = m\omega^2 = 0,4 \cdot (10\pi)^2 = 40\pi^2 = 400\frac{N}{m}$$

Όμως $\Sigma F_{max} = D \cdot A \Leftrightarrow A = \frac{\Sigma F_{max}}{D} \Leftrightarrow A = \frac{120}{400} \Leftrightarrow A = 0,3m$

Αφού ξέρουμε ότι το υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. η συνισταμένη δύναμη θα έχει τη μορφή $\Sigma F = -D \cdot x \Leftrightarrow \Sigma F = -400 \cdot x\,(S.I.)\ με -0,3 \le x \le +0,3m$ και η γραφική παράσταση είναι:



β) Η χρονική εξίσωση της δύναμης θα είναι

$$\Sigma F = -\Sigma F_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow \Sigma F = -120 \cdot \eta\mu(10\pi + \varphi_0)(S.I.)$$

Για $t=0$, $\Sigma F = +120N$, άρα από την παραπάνω εξίσωση

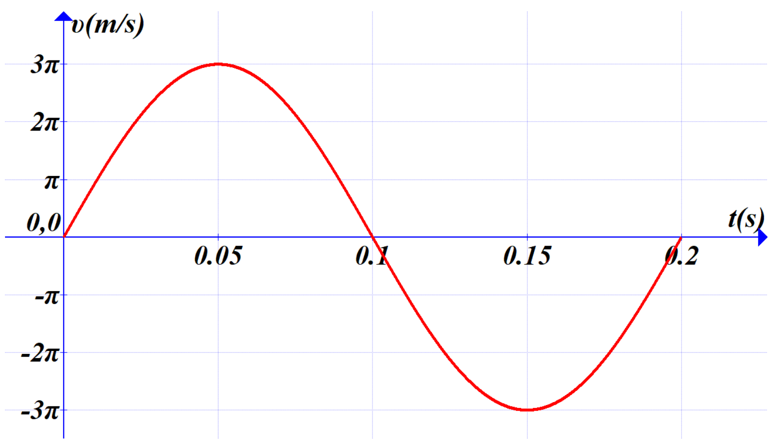
$$120 = -120 \cdot \eta\mu\varphi_0 \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} rad$$

Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι

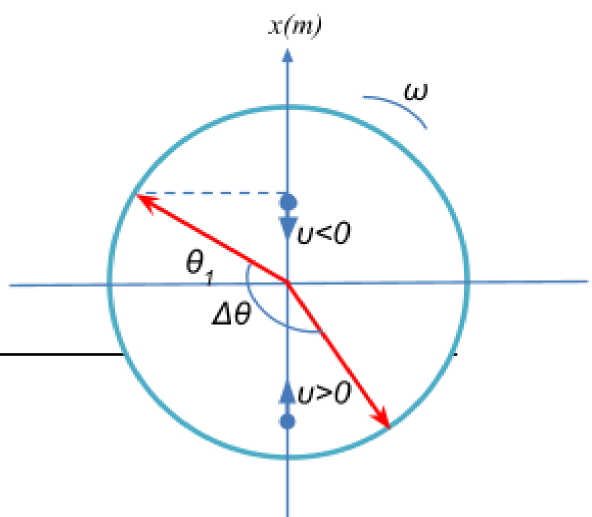
$$\upsilon = \upsilon_{max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow \upsilon = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Leftrightarrow \upsilon = 0,3 \cdot 10\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow \upsilon = 3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{3\pi}{2})(S.I.)$$

Η σχέση μπορεί να μετασχηματιστεί σε $\upsilon = 3\pi \cdot \eta\mu(10\pi t)(S.I.)$, η οποία μας διευκολύνει για να την παραστήσουμε γραφικά.



γ) Ο συντομότερος τρόπος εύρεσης χρονικού διαστήματος μετάβασης μεταξύ δύο θέσεων σε ταλάντωση, είναι με το στρεφόμενο διάνυσμα.



$$\eta\mu\theta_1 = \frac{0,15}{0,3} \Leftrightarrow \eta\mu\theta_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} rad$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{0,15\sqrt{3}}{0,3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6} rad$$

Άρα η γωνία που διαγράφεται από το στρεφόμενο διάνυσμα είναι $\Delta\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} rad$

Όμως $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} = 10\pi \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{1}{12} s$

δ) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση:

$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow |\upsilon| = \sqrt{\frac{D}{m}(A^2 - x^2)} \Leftrightarrow |\upsilon| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Leftrightarrow |\upsilon| = 10\pi\sqrt{0,3^2 - \left(0,15\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |\upsilon| = 10\pi\sqrt{0,09 - 0,0225 \cdot 2)} \Leftrightarrow |\upsilon| = 10\pi\sqrt{0,045} \Leftrightarrow |\upsilon| = 10\pi\sqrt{0,0225 \cdot 2} \Leftrightarrow |\upsilon| = 1,5\pi\sqrt{2} m/s$$

Αφού $\upsilon > 0$, δεχόμαστε $\upsilon = +1,5\pi\sqrt{2} m/s$

- Ρυθμός μεταβολής ορμής $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -400 \cdot 0,15\sqrt{2} = -60\sqrt{2}\frac{kgm}{s^2}$
- Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας
  $$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx \cdot \upsilon = -400 \cdot 0,15\sqrt{2} \cdot 1,5\pi\sqrt{2} = -180\pi\frac{J}{s}$$
- Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας
  $$\frac{dU}{dt} = \frac{-dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = -\frac{F_{\varepsilon\pi} \cdot dx}{dt} = -(-Dx) \cdot \upsilon = +Dx \cdot \upsilon = +400 \cdot 0,15\sqrt{2} \cdot 1,5\pi\sqrt{2} = +180\pi\frac{J}{s}$$

Σχόλια

α) Αν δίνεται μόνο η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης με το χρόνο, χωρίς να αναφέρεται ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το είδος της κίνησης. Ας σκεφτούμε την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης όπου η συνισταμένη δύναμη είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, αλλά η συνισταμένη δύναμη έχει εξίσωση $\Sigma F = F_{\delta\iota\varepsilon\gamma} - Dx - b\upsilon$ …

β) Επειδή στην α.α.τ. ισχύει η ΑΔΕΤ, μπορούμε να γράψουμεκαι

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = +180\sqrt{2}\frac{J}{s}$$

Σημείωση: Τα διαγράμματα έγιναν με το Graph, οπότε η τελεία αντιστοιχεί στο κόμμα…

Ανδρέας Ριζόπουλος