Chapitre A8
Équations

I. Définitions

Une **équation** est une égalité où au moins un des nombres est désigné par une lettre. Ces nombres écrits en lettres sont les **inconnues** de cette équation. Résoudre une équation, c'est **trouver toutes les valeurs des inconnues** pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Par exemple, l'équation $3x + 5 = x - 2$ a pour **inconnue** x. Dans cette équation, $3x + 5$ est le **membre de gauche** et $x - 2$ est le **membre de droite**.

On dit qu'un nombre est une **solution** de l'équation s'il vérifie l'égalité.

Par exemple, $x = 2$ est la **solution** de l'équation $3x + 5 = 11$.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui **peut** se mettre sous la forme $ax + b = 0$ où a et b sont des **constantes** et x est une **inconnue**.

Une équation du premier degré à une inconnue peut avoir soit **1 solution** soit **aucune solution** soit une **infinité de solutions**.

Exemples

- L'équation $x + 2 = 0$ admet une solution $x = -2$.
- L'équation $0x = 2$ n'a pas de solution. Aucun nombre ne vérifie cette égalité.
- L'équation $x = x + 1$ n'a pas de solution car **aucun nombre n'est égal à son suivant**.
- L'équation $x = x$ possède une infinité de solutions : tous les nombres vérifient l'égalité.

Une telle équation est aussi appelée une **identité**.

- L'équation $3(x + 2) = 3x + 6$ est une identité. Tous les nombres vérifient cette égalité.
- L'équation $x + 2 = 5$ admet une solution $x = 3$.

Pour résoudre une telle équation, on **isole les termes** contenant l'**inconnue** d'un côté et les **constantes** de l'autre en utilisant la règle suivante :

Règle

Soit a, b et c des nombres réels, on peut affirmer :

- $a = b$ si $a + c = b + c$
- $a = b$ si $a - c = b - c$
- $a = b$ si $a \times c = b \times c$ et si $c \neq 0$
- $a = b$ si $a : c = b : c$ et si $c \neq 0$

Remarque

$5 \times 0 = 3 \times 0$ et pourtant $5 \neq 3$

Exemple 1

On veut résoudre l'équation suivante :

$$5x + 2 = 3x - 8$$

Solution $5x + 2 - 3x = 3x - 8 - 3x2x + 2 - 2 = -8 - 2\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2}x = -5$

Vérification

D'une part, $5x + 2 = 5 \times (-5) + 2 = -25 + 2 = -23$

D'autre part, $3x - 8 = 3\times(-5) - 8 = -15 - 8 = -23$
L'équation admet une solution $x = -5$.

Exemple 2
On veut résoudre l'équation suivante :

$$-3x - 7 = 4x + 5$$

Solution $-3x - 7 + 3x = 4x + 5 + 3x - 7 - 5 = 7x + 5 - 5\frac{-12}{7} = \frac{7x}{7}x = -\frac{12}{7}$

Vérification

D'une part, $-3x - 7 = -3 \times \left(-\frac{12}{7}\right) - 7 = -\frac{13}{7}$

D'autre part, $4x + 5 = 4 \times \left(-\frac{12}{7}\right) + 5 = -\frac{13}{7}$

L'équation admet une solution $x = -\frac{12}{7}$.

Exemple 3
On veut résoudre l'équation suivante :

$$3(x + 2) = -2x + 7$$

Solution
On développe le membre de **gauche** :

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

L'équation est donc équivalente à :

$$3x + 6 = -2x + 73x + 6 + 2x = -2x + 7 + 2x5x + 6 - 6 = 7 - 6\frac{5x}{5} = \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}$$

Vérification

D'une part, $3(x + 2) = 3\left(\frac{1}{5} + 2\right) = \frac{33}{5}$

D'autre part, $-2x + 7 = -2 \times \frac{1}{5} + 7 = \frac{33}{5}$

L'équation admet une solution $x = \frac{1}{5}$.

II. Algébrisation

Pour résoudre un problème nécessitant la résolution d'une équation, on distingue plusieurs étapes :

1. **Choix de l'inconnue :** on désigne par x un nombre de l'énoncé, en général le nombre cherché.
2. **Mise en équation :** on traduit l'énoncé du problème par une équation.
3. **Résolution de l'équation.**
4. **Vérification et réponse au problème.**

Exemple 1
Zouhir et Camille possèdent des bandes dessinées. Camille détient 15 BD de plus que Zouhir. Si elle lui en donne 3, elle a alors deux fois plus de BD que lui.
Combien Zouhir a-t-il de BD ?

Solution

Choix de l'inconnue
Soit x le nombre de BD de Zouhir.

Mise en équation

Le problème se traduit par l'équation suivante :
$x + 15$ est le nombre de BD de Camille.

$$x + 15 - 3 = 2(x + 3)$$

Résolution de l'équation

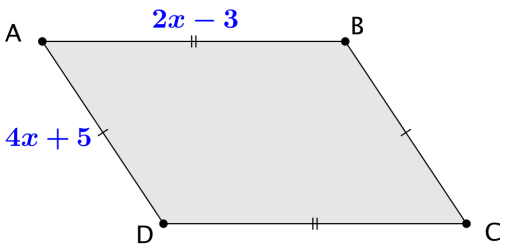
$$x + 12 - x = 2x + 6 - x12 - 6 = x + 6 - 6x = 6$$

Vérification et réponse au problème

Zouhir possède 6 BD et Camille 21. Si Camille en donne 3 à Zouhir, il en aura 9. Cela représente bien la moitié des 18 BD qui restent à Camille.

Exemple 2

Soit x un nombre supérieur ou égal à 2.
Soit un parallélogramme ABCD tel que
$AB = 2x - 3$ et $AD = 4x + 5$.
ABCD peut-il être un losange ?



Solution

Mise en équation

Le parallélogramme ABCD est un losange si $AB = AD$. Le problème se traduit donc par l'équation suivante :

$$2x - 3 = 4x + 5$$

Résolution de l'équation

$$2x - 3 - 2x = 4x + 5 - 2x$$

$$-3 - 5 = 2x + 5 - 5$$

$$\frac{-8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x = -4$$

Vérification et réponse au problème

$$AB = 2x - 3 = 2\times(-4) - 3 = -8 - 3 = -11$$

Une longueur ne peut être négative donc ABCD ne peut pas être un losange.

Exemple 3

Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. *Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?*

Solution

Choix de l'inconnue

Soit x le nombre d'années pour que l'âge de Pierre soit le double de celui de Marc.

Mise en équation

Le problème se traduit par l'équation suivante :

$$26 + x = 2(11 + x)$$

Résolution de l'équation

$$26 + x - x = 22 + 2x - x26 - 22 = x + 22 - 22x = 4$$

Vérification et réponse au problème

Dans 4 ans, Marc aura 15 ans et Pierre 30 ans, soit le double de l'âge de Marc.

Exemple 4

La somme de trois nombres entiers consécutifs égale 2619.

Quels sont ces trois nombres ?

Solution

On appelle x le 2ème nombre. $x - 1$ *est le 1er nombre et* $x + 1$ *est le 3ème nombre.*

L'énoncé se traduit par l'équation suivante :

$$x - 1 + x + x + 1 = 2619 \frac{3x}{3} = \frac{2619}{3} x = 873$$

Or, $872 + 873 + 874 = 2619$

Donc les 3 nombres cherchés sont 872, 873 et 874.