

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

12.12.2022

Лекция

Виды случайных событий. Определение вероятности.

Цели:

1.Образовательная: сформировать представления о видах событий, рассмотреть классическое и статистическое определение вероятностей.

2.Воспитательная: воспитать логическое мышление, внимание.

3.Развивающая: развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Виды случайных событий. Определение вероятности» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

1) Виды случайных событий.

- 2) Классическое и статистическое определение вероятностей.**
- 3) Случайные величины.**

Как наука теория вероятности зародилась в 17в. Возникновение понятия вероятности было связано как с потребностями страхования, получившего значительное распространение в ту эпоху, когда заметно росли торговые связи и морские путешествия, так и в связи с запросами азартных игр. Слово «азарт», под которым обычно понимается сильное увлечение, горячность, является транскрипцией французского слова *hazard*, буквально означающего «случай», «риск».

Азартными называют те игры, а которых выигрыш зависит главным образом не от умения игрока, а от случайности. Схема азартных игр была очень проста и могла быть подвергнута всестороннему логическому анализу. Первые попытки этого рода связаны с именами известных учёных--алгебраиста Джероламо Кардана (1501- 1576) и Галилео Галилея (1564--1642). Однако честь открытия этой теории, которая не только даёт возможность сравнивать случайные величины, но и производить определенные математические операции с ними, принадлежит двум выдающимся ученым--Блезу Паскалю (1623--1662) и Пьеру Ферма. Ещё в древности было замечено, что имеются явления, которые обладают особенностью: при малом числе наблюдений над ними не наблюдается никакой правильности, но по мере увеличения числа наблюдений всё яснее проявляется определенная закономерность. Всё началось с игры в кости.

Теория вероятностей является одним из классических разделов математики. Она имеет длительную историю. Вероятностные и статистические методы в настоящее время глубоко проникли в приложения. Они используются в физике, технике, экономике, биологии и медицине. Особенно возросла их роль в связи с развитием вычислительной техники. Например, для изучения физических явлений производят наблюдения или опыты. Их результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин. При повторении опытов мы обнаруживаем разброс их результатов.

Например, повторяя измерения одной и той же величины одним и тем же прибором при сохранении определенных условий (температура, влажность и т.п.), мы получаем результаты, которые хоть немного, но все же отличаются друг от друга. Даже многократные измерения не дают возможности точно предсказать результат следующего измерения. В этом смысле говорят, что результат измерения есть величина случайная.

Виды событий:

1. Достоверное – такое событие, которое обязательно произойдет при выполнении определенной совокупности условий (вода закипает при 100 0С).

2. Невозможное – событие, которое никогда не произойдет при выполнении определенной совокупности условий (вода замерзает при 100 0C).

3. Случайное – событие, которое может произойти, а может и не произойти при выполнении определенной совокупности

Выполнение определенной совокупности условий называется **испытанием**.

Любой из возможных результатов испытаний, называется **элементарным исходом**.

Событием называется один или несколько выбранных элементарных исходов.

Например: выстрел по мишени из положения лежа при сильном боковом ветре - это испытание. Попадание в мишень - это событие. Попадание и не попадание в мишень - это элементарные исходы.

Частотой появления данного события называется **число m**, означающее, сколько раз появилось это событие **в n** испытаниях.

Относительной частотой появления этого события, называется отношение частоты к числу испытаний.

$$w = m / n$$

Например: стрелок попал в мишень 2 раза из 10 попыток:

$$m= 2, n=10 \rightarrow w = 2 / 10 = 0,2$$

Виды случайных событий :

1. Несовместимые и несовместные– такие события, появление одного из которых исключает одновременного появления другого события (появление «орла» или «решки» при одном бросании монеты).

2. Равновозможные – которые имеют одинаковую возможность появления (появление «орла» или «решки» при одном бросании монеты). 3. Достоверные – такие случайные события, которые образуют полную группу и одно из событий этой группы обязательно произойдет (попадание и не попадание в мишень - это полная группа).

Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность. Наиболее широкое распространение получили два определения вероятности события: классическое и статистическое.

Классическое определение вероятности связано с возможностью априорного составления модели рассматриваемого события и введения понятия благоприятствующего исхода.

Исход называется *благоприятствующим* данному событию, если его появление приводит к наступлению этого события.

В приведенном примере рассматриваемое событие — четное число очков на выпавшей грани — имеет три благоприятствующих исхода. В данном случае известно и общее количество возможных исходов — 6. Значит, здесь можно использовать классическое определение вероятности события.

Определение (классическое). Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A) = m/n, \quad (1.8)$$

где $P(A)$ — вероятность события A , m — число благоприятствующих событию A исходов, n — общее число возможных исходов.

В рассмотренном примере

$$P(A) = 3/6 = 0,5.$$

Статистическое определение вероятности связано с понятием относительной частоты появления события A в опытах и требует проведения последовательности эмпирических исследований, результаты которых используются при вычислении относительной частоты события A .

Относительная частота появления события A вычисляется по формуле

$$P^*(A) = m_1 / n_1, \quad (1.9)$$

где m_1 — число появления события A в серии из n_1 опытов (испытаний).

Определение (статистическое). Вероятностью события A называется число, относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа опытов.

В практических задачах за вероятность события A принимается относительная частота $P^*(A)$ при достаточно большом числе испытаний.

Из данных определений вероятности события A видно, что всегда выполняется неравенство

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Для определения вероятности события на основе формулы (1.8) часто используют формулы комбинаторики (1.2)—(1.9), по которым находят число благоприятствующих исходов и общее число возможных исходов.

Пример 1. Известно, что в поступившей партии из 30 швейных машинок 10 машинок имеют внутренний дефект. Определить вероятность того, что из партии в пять наудачу взятых машинок три окажутся бездефектными.

Для решения данной задачи введем обозначения. Пусть N —

— 30 — общее число машинок, n — 20 — число бездефектных машинок, m — 5 — число отобранных в партию машинок, k — 3 — число бездефектных машинок в отобранной партии.

Общее число комбинаций по m машинок, т.е. общее число возможных исходов будет равно числу сочетаний из N элементов по m , т.е. C_N^m . Но в каждой отобранной комбинации должно содержаться по три бездефектные машинки. Число таких комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k , т.е. C_n^k . С каждой такой комбинацией в отобранной партии оставшиеся дефектные элементы тоже образуют множество комбинаций, число которых равно числу сочетаний из $N-n$ элементов по $m-k$, т.е. C_{N-n}^{m-k} . Значит, общее число благоприятствующих исходов определяется произведением $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$. Откуда получаем

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}. \quad (1.10)$$

$$P(A) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{30}^5} = 0,36.$$

Подставим сюда численные значения:

Формула (1.10) носит название *формулы гипергеометрического распределения*.

Пример 2. Изготовлена партия обуви в количестве 22 пар. Известно, что в ней находится 10 пар бракованных. Для проверки отобрано 4 пары. Определить вероятность того, что в отобранных парах одна, две или три пары окажутся бракованными.

Используем формулу (1.10) для трех событий:

A_x — одна бракованная пара среди отобранных,

A_2 — две бракованные пары среди отобранных,

A_3 — три бракованные пары среди отобранных.

Находим вероятности этих событий:

Случайной называется величина, которая в результате испытаний может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными. *Непрерывными* случайными величинами являются: время безотказной работы элементов, устройств, агрегатов, систем; время вынужденного простоя оборудования из-за отказов; уровень того или иного технического параметра и т.д. *Дискретными* случайными величинами являются: число неисправных элементов, устройств, агрегатов из общего числа находящихся в эксплуатации; число дефектных изделий в какой-либо партии продукции; количество повреждений элементов какого-либо оборудования в единицу времени и т.д.

Из-за невозможности указать, какое конкретное значение примет случайная величина в данном эксперименте, для ее характеристики применяются вероятности того, что она будет равна заданному значению или окажется в указанных пределах возможного значения. При этом используются понятия *числовых характеристик* распределений случайных величин.

Основные *числовые характеристики* случайных величин – *математическое ожидание (среднее значение), дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана, коэффициент вариации.*

Если задан ряд распределений вероятностей P_i для значений x_i случайной величины X , то математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

Показателями, характеризующими степень рассеяния случайной величины около своего математического ожидания, являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X) = M(X - M(X))^2, \quad D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Для более полного описания случайных величин вводятся понятия функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$. *Функция распределения* определяет для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x)$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины – первая производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины определяются как

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2$$

Пример. Энергосистема ограничивает промышленное предприятие в потреблении электрической мощности. При этом в течение года возможны дефициты в 5, 10 и 15 МВт с вероятностями соответственно 0,001, 0,0004 и 0,0002. Определить математическое ожидание недоотпуска электроэнергии промышленному предприятию за год.

Решение.

$$M[P] = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0,001 \cdot 5 + 0,0004 \cdot 10 + 0,0002 \cdot 15 = 0,012 \text{ МВт}$$

В году 8760 часов. $M[W] = 8760 \cdot M[P] = 8760 \cdot 0,012 = 105,12 \text{ МВт} \cdot \text{ч}$.

Биномиальное распределение Если производится серия N независимых опытов, причём вероятность появления изучаемого события в каждом опыте постоянна и равна p , а вероятность его неоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность $P_{N,i}$ появления данного события точно i раз равна

$$P_{N,i} = C_N^i p^i q^{N-i}, \quad M[i] = Np, \quad \sigma_i = \sqrt{Npq},$$

где
$$C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

Пример. На электростанции работает четыре однотипных генератора. Вероятность аварийного повреждения каждого из них $p = 0,02$. Составить закон распределения вероятного числа повреждённых генераторов.

Решение. Число повреждённых генераторов является дискретной случайной величиной. Пользуясь формулой биномиального распределения, находим:

Число повреждённых генераторов	0	1	2	3	4
Вероятность	0,922	0,075	0,023	0,00003	0,0000001

Распределение Пуассона. Этот закон позволяет определить вероятность $P_k(t)$ наступления ровно k событий за промежуток времени t :

$$p_k(t) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad M[k] = a = \lambda t, \quad \sigma_k = \sqrt{\lambda t},$$

где a – параметр закона распределения – математическое ожидание числа событий за время t ; λ – интенсивность случайного события.

Закон распределения Пуассона может быть получен из биномиального распределения при достаточно больших N и малых p тогда

$$M[X] = a = Np.$$

Пример 1. Выпущена партия резисторов 100000 штук. Вероятность того, что резистор имеет брак, $p = 0,0001$. Найти вероятность того, что в партии ровно пять бракованных резисторов.

Решение. $a = Np = 100000 \cdot 0,0001 = 10$.

$$P_5 = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = 0,375.$$

Пример 2. Определить вероятность того, что за 500 ч работы произойдет два отказа в сложном изделии, если известно, что интенсивность отказов $\lambda = 1 \cdot 10^{-3}$.

Решение. $P_2(500) = \frac{(10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2)^2}{2!} e^{-10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,075$.

Экспоненциальное распределение. Интегральная функция экспоненциального распределения выражает вероятность отказа изделия или элемента за данный интервал времени: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Функция надежности $R(t)$ используется в качестве модели вероятности безотказной работы за то же время:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность отказов, которая для экспоненциального распределения постоянна.

Плотность вероятности отказов $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Среднее время до возникновения отказа или среднее время безотказной работы является математическим ожиданием экспоненциального распределения, т.е. величиной, обратной интенсивности отказов

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = M[t].$$

Заменяя в функции надёжности $R(t)$ величину λ , обратной ей $\lambda = \frac{1}{T_{cp}}$, получим $R(t) = e^{-\frac{t}{T_{cp}}}$, $t \geq 0, T_{cp} > 0$.

Таким образом, зная среднее время безотказной работы T_{cp} или постоянную интенсивность отказов λ , можно в случае экспоненциального распределения найти вероятность безотказной работы для интервала времени от момента включения элемента, устройства или агрегата до любого заданного момента t .

Вероятность безотказной работы на интервале, превышающем среднее время T_{cp} , равна

$$R(t) = e^{-t/T_{cp}} = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Дисперсия времени безотказной работы

$$D(t) = \int_0^{\infty} (t - T_{cp})^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} (t - T_{cp})^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} = T_{cp}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(t) = T_{cp}$.

Равенство среднеквадратического отклонения среднему времени работы – характерный признак экспоненциального распределения.

Пример. Время безотказной работы силового трансформатора при перегрузке распределено по экспоненциальному закону $f(t) = 0,02e^{-0,02t}$, где t – время, ч. Найти вероятность того, что трансформатор в перегрузочном режиме проработает безотказно в течение 100 ч.

Решение. $R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,02 \cdot 100} = 0,14$.

Среднее время безотказной работы $T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,02} = 50$ ч.

Вероятность безотказной работы при $t > T_{\text{ср}}$ равна

$$R(t) = \frac{1}{e} = 0,368$$

Зависимость интенсивности отказов от времени представлена на рис. 1.7.



Рис 1.7. Кривая жизни изделия

Гамма-распределение. Гамма-распределение в теории надёжности применяется для описания характера изменения параметров надёжности в первый период эксплуатации и в период износа. Если отказ устройства или системы возникает тогда, когда происходит не менее k отказов его элементов, а отказы элементов, подчинены экспоненциальному закону с параметром λ_0 плотность вероятности отказа определяется как

$$f(t) = \frac{\lambda_0^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda_0 t},$$

где λ_0 – исходная интенсивность отказов элементов устройства, отказ которого вызывается отказом k элементов;

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \approx (k-1)!$$

Этому распределению подчиняется время работы резервированных устройств, отказ которых вызывается отказом k их элементов.

При $k=1$ гамма-распределение совпадает с экспоненциальным распределением. При увеличении k гамма-распределение приближается к симметричному распределению, что и показывает рис. 1.7.

Распределение Вейбулла. В теории надежности распределение Вейбулла применяется в следующей форме:

$$f(t) = \frac{a}{t_0} t^{a-1} e^{-\frac{t^a}{t_0}}; t \geq 0,$$

где t_0 – приведённое значение среднего времени безотказной работы; $a > 0$ – параметр формы распределения.

Вероятность отсутствия отказов за время t

$$P(t) = \lambda e^{-\lambda_0 t^a}$$

Интенсивность отказов

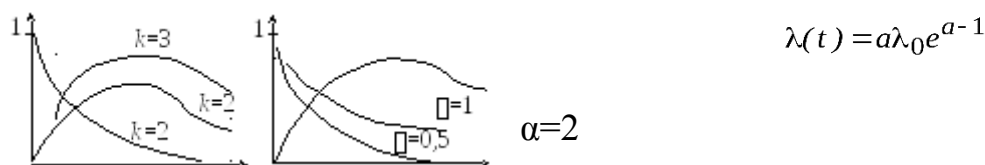


Рис. 1.8. Изменение формы гамма-распределения в зависимости от k

Рис. 1.9. Изменение формы распределения Вейбулла в зависимости от a

При $a < 1$ интенсивность отказов – убывающая функция; при $a > 1$ – возрастающая, что соответствует периодам начальных отказов и старения (рис. 1.7).

Нормальное (гауссовское) распределение. Плотность вероятности нормального распределения характеризует время возникновения отказа:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T)^2}{2\sigma^2}},$$

где T – математическое ожидание времени между отказами; σ – среднее квадратическое отклонение.

Функция распределения соответствует вероятности отказа за время t :

$$F(t) = P(T < t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-T)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Главная особенность этого закона состоит в том, что он является *предельным*; к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения; в теории надёжности применяется для оценки постепенных отказов.

Домашнее задание

Ответить на вопросы:

- 1) Какие вы знаете виды случайных событий?
- 2) Классическое определение вероятности.
- 3) Статистическое определение вероятности.
- 4) Что называют случайной величиной?

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru