

Concepto

Las ecuaciones racionales son las que llevan la incógnita x en el denominador.

Para resolver este tipo de ecuaciones tenemos que tener en cuenta que los numeradores algebraicos, al igual que los numéricos, se suprimen multiplicando por su mínimo común múltiplo (o el producto de todos ellos). De esta forma se llega a una ecuación polinómica.

En este tipo de ecuaciones es necesario comprobar que los valores obtenidos de la incógnita cumplen la ecuación inicial, porque puede aparecer alguna solución “extraña” que anule algún denominador.

Actividad resuelta

Resuelve:

$$\frac{9}{x} + \frac{9}{x^2} = x + 1$$

Resolución

Observa que $x = 0$ no es solución porque anula los denominadores. Luego, $x \neq 0$

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es x^2 .

$$x^2 \frac{9}{x} + x^2 \frac{9}{x^2} = x^2(x + 1) \Rightarrow 9x + 9 = x^2(x + 1) \Rightarrow 9(x + 1) = x^2(x + 1) \Rightarrow x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0$$

$$(x^2 - 9)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = \pm 3$$

Las soluciones son $x = -1$, $x = \pm 3$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

$$x - \frac{64}{x^3} = \frac{12}{x}$$

Resolución

Observa que $x = 0$ no es solución porque anula los denominadores. Luego, $x \neq 0$

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es x^3 .

$$x^3 x - x^3 \frac{64}{x^3} = x^3 \frac{12}{x} \Rightarrow x^4 - 64 = 12x^2 \Rightarrow x^4 - 12x^2 - 64 = 0 \text{ (bicuadrada)}$$

$$t = x^2, t^2 = x^4 \Rightarrow t^2 - 12t - 64 = 0;$$

$$t = \frac{12 \pm 20}{2} \Rightarrow t = 16 = x^2 \rightarrow x = \pm 4 \quad t = -4 = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4} \text{ (no existe)}$$

Las soluciones son $x = \pm 4$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

$$\frac{x-4}{x^2-5x} - \frac{2}{x^2-25} = 0$$

Resolución

$$x^2 - 5x = x(x - 5); \quad x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5). \text{ Sustituyendo, } \frac{x-4}{x(x-5)} - \frac{2}{(x+5)(x-5)} = 0$$

Observa que $x = 0$, $x = -5$, $x = 5$ no son soluciones porque anulan los denominadores.

Luego, $x \neq 0$, $x + 5 \neq 0$, $x - 5 \neq 0$.

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $x(x + 5)(x - 5)$

$$x(x+5)(x-5)\frac{x-4}{x(x-5)} - x(x+5)(x-5)\frac{2}{(x+5)(x-5)} = 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) - 2x = 0$$

$$x^2 - x - 20 = 0 ; x = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ (no válida) } x = -4$$

La solución es $x = -4$. Claramente válida porque no anula los denominadores

$$\frac{2x-1}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{11}{2}$$

Resolución

Observa que $x = 0$, $x = 1$ no son soluciones porque anulan los denominadores. Luego, $x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$.

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $2x(x-1)$

$$2x(x-1)\frac{2x-1}{x} + 2x(x-1)\frac{4}{x-1} = 2x(x-1)\frac{11}{2} \Rightarrow 2(x-1)(2x-1) + 8x = 11x(x-1)$$

$$4x^2 + 2x + 2 = 11x^2 - 11x \Rightarrow 7x^2 - 13x - 2 = 0 ; x = \frac{13 \pm 15}{14} \Rightarrow x = 2 \quad x = \frac{-1}{7}$$

Las soluciones son $x = 2$, $x = \frac{-1}{7}$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

$$\frac{2x-4}{x^2-2x} - \frac{5}{3x+6} = \frac{4}{x^2-4}$$

Resolución

$$x^2 - 2x = x(x-2) ; 2x-4 = 2(x-2) ; 3x+6 = 3(x+2) ; x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

$$\text{Sustituyendo, } \frac{2(x-2)}{x(x-2)} - \frac{5}{3(x+2)} = \frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

Observa que $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ no son soluciones porque anulan los denominadores.

$$\text{Luego, } x \neq 0, x+2 \neq 0, x-2 \neq 0 \text{ y la ecuación se transforma en } \frac{2}{x} - \frac{5}{3(x+2)} = \frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $3x(x+2)(x-2)$

$$3x(x+2)(x-2)\frac{2}{x} - 3x(x+2)(x-2)\frac{5}{3(x+2)} = 3x(x+2)(x-2)\frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

$$6(x+2)(x-2) - 5x(x-2) = 12x \Rightarrow 6x^2 - 24 - 5x^2 + 10x = 12x$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0 ; x = \frac{2 \pm 10}{2} \Rightarrow x = 6 \quad x = -4$$

Las soluciones son $x = 6$, $x = -4$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

$$\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x}$$

Resolución

$$x^2 + 2x = x(x+2). \text{ Sustituyendo, } \frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x(x+2)}$$

Observa que $x = 0$, $x = -2$ no son soluciones porque anulan los denominadores. Luego, $x \neq 0$, $x+2 \neq 0$

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $x(x+2)$

$$x(x+2)\frac{x+9}{x} - x(x+2)\frac{5+x}{x+2} = x(x+2)\frac{12x+12}{x(x+2)}$$

$$(x+2)(x+9) - x(5+x) = 12x+12 \Rightarrow x^2 + 11x + 18 - 5x - x^2 = 12x + 12 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow x = 1$$

La solución es $x = 1$. Claramente válida porque no anula los denominadores

$$\frac{x}{2x-6} - \frac{3}{x^2-6x+9} = \frac{x-2}{3x-9}$$

Resolución

$$2x-6 = 2(x-3) ; x^2-6x+9 = (x-3)^2 ; 3x-9 = 3(x-3)$$

$$\text{Sustituyendo, } \frac{x}{2(x-3)} - \frac{3}{(x-3)^2} = \frac{x-2}{3(x-3)}$$

Observa que $x = 3$ no es solución porque anula los denominadores. Luego, $x - 3 \neq 0$.

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $6(x-3)^2$.

$$6(x-3)^2 \frac{x}{2(x-3)} - 6(x-3)^2 \frac{3}{(x-3)^2} = 6(x-3)^2 \frac{x-2}{3(x-3)}$$

$$3x(x-3) - 18 = 2(x-3)(x-2) \Rightarrow 3x^2 - 9x - 18 = 2x^2 - 10x + 12$$

$$x^2 + x - 30 = 0 ; x = \frac{-1 \pm 11}{2} \Rightarrow x = 5 \quad x = -6$$

Las soluciones son $x = 5$, $x = -6$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

$$\frac{x^2-x}{x^2+x} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{2x+2}{x+1}$$

Resolución

$$x^2 - x = x(x-1) ; x^2 + x = x(x+1) ; 2x+2 = 2(x+1)$$

$$\text{Sustituyendo, } \frac{x(x-1)}{x(x+1)} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Observa que $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ no son soluciones porque anulan los denominadores.

$$\text{Luego, } x \neq 0, x+1 \neq 0, x-1 \neq 0 \text{ y la ecuación se transforma en } \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+3}{x-1} = 2$$

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $(x+1)(x-1)$.

$$(x + 1)(x - 1) \frac{x-1}{x+1} - (x + 1)(x - 1) \frac{x+3}{x-1} = 2(x + 1)(x - 1)$$

$$(x - 1)^2 - (x + 1)(x + 3) = 2(x^2 - 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 2$$

$$2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (no válida)}, x = -3$$

La solución es $x = -3$. Claramente válida porque no anula los denominadores

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

Resolución

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a). \text{ Sustituyendo, } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

Observa que $x = a$, $x = -a$, no son soluciones porque anulan los denominadores.

Luego, $x + a \neq 0$, $x - a \neq 0$. Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores,

que es $(x + a)(x - a)$ y queda

$$(x + a)(x - a) \frac{1}{x-a} + (x + a)(x - a) \frac{1}{x+a} = (x + a)(x - a) \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

$$x + a + x - a = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Claramente válida porque no anula los denominadores}$$

$$\left(x + 1 + \frac{6}{x}\right)\left(x - 1 + \frac{6}{x}\right) = 24$$

Resolución

Observa que $x = 0$ no es solución, porque anula los denominadores. Luego, $x \neq 0$.

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por x^2 y queda $x\left(x + 1 + \frac{6}{x}\right)x\left(x - 1 + \frac{6}{x}\right) = 24x^2$

$$(x^2 + x + 6)(x^2 - x + 6) = 24x^2 \Rightarrow x^4 - x^3 + 6x^2 + x^3 - x^2 + 6x + 6x^2 - 6x + 36 = 24x^2$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \text{ (bicuadrada)}; t = x^2, t^2 = x^4 \Rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow t = 9 = x^2 \rightarrow x = \pm 3 \quad t = 4 = x^2 \rightarrow x = \pm 2$$

Las soluciones son $x = \pm 3$, $x = \pm 2$. Claramente válidas porque no anulan los denominadores

Problemas usando ecuaciones racionales**Problemas resueltos**

Dos obreros, trabajando juntos, tardan 15 horas en hacer una zanja. Trabajando por separado, uno de ellos emplearía 16 horas más que el otro. ¿Cuánto tardará cada uno solo?

Resolución

tiempo que tarda el más rápido: x tiempo que tarda el más lento: $x + 16$

Si los dos tardan 15 h, en 1h hacen $\frac{1}{15}$ de todo el trabajo. Luego, como el trabajo que hace en 1 h el primero más el que hace en 1 h el 2º es igual al que hacen los dos en 1 h: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{15}$.

Observa que $x = 0$, $x = -16$ no son solución. Luego, $x \neq 0$, $x + 16 \neq 0$.

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $15x(x + 16)$

$$15x(x + 16)\frac{1}{x} + 15x(x + 16)\frac{1}{x+16} = 15x(x + 16)\frac{1}{15}$$

$$15(x + 16) + 15x = x(x + 16) \Rightarrow 30x + 240 = x^2 + 16x$$

$$x^2 - 14x - 240 = 0 ; x = \frac{14 \pm 34}{2}, x = 24 \quad x = -10 \text{ (no válida)}$$

Por tanto, si el primero trabaja solo, tarda 24 h y si el 2º trabaja solo, tarda $24 + 16 = 40$ h

Dos grifos tardan en llenar un depósito 12 minutos. El primero solo tarda en llenar el depósito 10 minutos menos que el segundo. ¿Cuánto tardaría cada grifo en llenar el depósito?

Resolución

tiempo que tarda el 1er grifo: $t - 10$ tiempo que tarda el 2º grifo: t (observa que $t > 10$)

Si los dos tardan 12 min, en 1 min llenan $\frac{1}{12}$ del depósito.

La parte de depósito que llena el 1º en 1 min más la parte que llena el 2º en 1 min es igual a la que llenan los dos en 1 min: $\frac{1}{t-10} + \frac{1}{t} = \frac{1}{12}$.

Observa que $t = 0$, $t = 10$ no son solución, porque anulan los denominadores. Luego, $t \neq 0$, $t - 10 \neq 0$.

Multiplicamos todos los términos por el mcm de los denominadores, que es $12t(t - 10)$:

$$12t(t - 10) \frac{1}{t - 10} + 12t(t - 10) \frac{1}{t} = 12t(t - 10) \frac{1}{12}$$

$$12t + 12(t - 10) = t(t - 10) \Rightarrow 24t - 120 = t^2 - 10t$$

$$t^2 - 34t + 120 = 0 ; t = \frac{34 \pm 26}{2}, t = 30 \quad t = 4 \text{ (no válida)}$$

Por tanto, el 1º tardaría $30 - 10 = 20$ min y el 2º 30 min

Un pintor con experiencia pinta un garaje en 8 horas, y su hijo lo hace en 12 horas. Suponiendo que su actividad se desarrolla a un ritmo constante, ¿qué fracción del total del trabajo hace cada uno en una hora? Si ambos trabajan juntos, en cooperación, ¿cuánto tardarían en terminar todo el trabajo?

Resolución

Si el padre tarda 8 horas en terminar y trabaja a ritmo constante, cada hora hace una octava parte del total (el 12,5 %, para hacernos una idea).

De la misma forma, en ese tiempo el hijo hace $1/12$ del total (algo más del 8 %).

Cooperando entre los dos, la fracción que completan en cada hora es $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$

Existe proporcionalidad directa entre las partes que van terminando entre ambos y el tiempo que va transcurriendo, luego podemos relacionar mediante regla de tres la fracción del trabajo con el tiempo empleado en ello.

Llamando x al tiempo total que nos piden:

$$\frac{5}{24} \text{ del total} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ hora}$$

$$\frac{24}{24} \dots \quad \Rightarrow \quad x \text{ horas}$$

Resulta entonces que el tiempo x es la fracción inversa de $\frac{5}{24}$,

$$\text{que es } \frac{24}{5} = 4,8 \text{ h} = 4 \text{ h} + 0,8 \text{ h} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Trabajando juntos, tardan sólo 4 horas y 48 minutos en pintar el garaje

ANEXO: MÁS ACTIVIDADES

Resuelve: $\frac{(x+1)^2}{x^2-1} = 5$; $\frac{8}{x^2-5} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2-1}$; $\frac{x}{1-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{12}$; $\frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1-x}{x+\frac{1}{3}}$; $\frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$

$x^2 = \frac{12}{x^2+1}$; $\frac{\frac{3x}{5}-12}{x+1} = 6$; $\frac{x^2(2x-5)}{x+1} = \frac{9(1-x)}{2x+5}$; $x+3 = \frac{2x+1}{x-1}$; $x-2 = \frac{2x-3}{x}$;
 $\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3}{2x}$

$\frac{-250}{x^2} + 2\pi x = 0$; $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)^{-2} = 9$; $1 - \frac{360000}{x^2} = 0$; $x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $34 - x^2 = \frac{225}{x^2}$

$\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{2-3x}{x^2-1}$; $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{5}{x^2-1}$; $\frac{2x+5}{3} = x - \frac{3}{3-x} + 4$;
 $9x^2 - \frac{63x^2}{x^2+5} = 8$

$\frac{x^2-32}{4} + \frac{28}{x^2-9} = 0$; $\frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$; $\frac{6}{x-3} - \frac{2}{x} = -5$;
 $\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{(x-3)(x-1)}$

$\frac{x-7}{x+3} = \frac{10}{x+3} - 3$; $\frac{3}{x+1} = \frac{x}{x-1} - 1$; $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x} = 1$; $\frac{4}{x^3} - \frac{5}{x} = 9x$;
 $\frac{9}{x} + \frac{9}{x^2} = x + 1$

$\frac{x+1}{6x^2} - \frac{x-1}{4x} = 1 + \frac{1}{6x^2}$; $\frac{x+1}{8x} - \frac{x-1}{4x^2} = 1 + \frac{1}{6x^3}$; $\frac{x+1}{8x^2} - \frac{-3}{4x} = \frac{-x}{6x^3}$;
 $1 + \frac{1}{2x} - \frac{x-1}{4x^2} = 1 + \frac{1}{6x^3}$

$\frac{3}{x} - \frac{x^2+3}{x} = x^3$; $\frac{4x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{14}{3}$; $\frac{8}{x+6} - \frac{4}{x-6} = 2$; $\frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} = 6$;
 $\frac{15}{x+10} - \frac{5}{x+2} = 0$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{4+2x}{x+2} = 3 - \frac{2x^2+7x-1}{x^2-4} ; \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x^2-1} ; \frac{2}{x-1} = \frac{7}{3} - \frac{2x-3}{x^2-1} ;$$

$$\frac{6x^2}{x^2-4} - \frac{15x}{5x+10} = \frac{2x}{x-2}$$

$$\frac{2x-3}{x^2-5x} + \frac{x+4}{x} = \frac{3}{4} ; \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x^2-1} ; 1 - \frac{x-4}{x-3} = \frac{6}{x^2-x-6} ; \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1+x}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{3x+5x^2}{x^2-x-6} ; \frac{3}{x^2-4} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{x+2} ; \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{x+1} - 2 ;$$

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x^2-6x+4}{x^2+3x+2} = -1$$

$$\frac{x^2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4} ; \frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{7x+2}{x^2-4} ; \frac{10}{x+5} + \frac{3+4x}{x+5} = 3 ;$$

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{7}{x+1}$$

$$\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+4} - \frac{3}{x^2+3x-4} = \frac{5}{x-1} ; \frac{15}{x-2} - \frac{12x+6}{x^2-4} = \frac{18}{x+2} ; \frac{x}{2a} - 2 = \frac{1+x}{2}$$

$$\frac{1}{x-1} + 3x + 3x^2 - 2 = \frac{3}{x-1} + 3x^2 ; \frac{x-3}{3} - \frac{1}{x-1} = 3x ; x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 5x + 5$$

$$\frac{x-3}{x} + 3x - \frac{5}{x} = 2x - \frac{3}{x} - 3 ; \frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2 ; x + \frac{1}{x-2} = 4 ; x + \frac{2}{x} = 3 ;$$

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{2x+9}{x}$$

$$2x - 2 = \frac{6x}{x-1} - 5 ; 3x + 1 - \frac{3}{x} = \frac{1+3x}{4} ; 2 + \frac{x+4}{3} = \frac{4x+4}{3} + \frac{2-x}{x-3} ; x + \frac{1}{x} = \frac{6}{3x}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{x} = \frac{3x+10}{3x} ; \frac{(x-2)^2}{x^2} - \frac{1}{2x} = \frac{8+3x}{2x^2} - \frac{2}{x} ; \frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2} ;$$

$$3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6x(17x-4)}{x^2}$$

$$3x - \frac{8}{x} + (x-1)^2 = 3(x-2) - (x-5) ; \frac{3}{x + \frac{1}{2 + \frac{x+1}{x-2}}} = \frac{1}{x} ; \frac{\frac{x-3}{2} - \frac{x-3}{4}}{x - \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x+1}}} = \frac{-1}{x} ; \frac{1 + \frac{x+1}{x-1}}{2 - \frac{x-1}{x+1}} = 2$$

- Explica si es cierto o falso: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $2(ab) = 2a2b$; $(x+2)(x-3) = x^2 - 6$

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 ; (-x)^2 = x^2 ; (-x)^3 = -x^3 ; (3x)^2 = 3x^2 ; x+x = x^2 ; \frac{x+2}{2} = x ; xx = 2x$$

$$(3x+5)(x-1) = 3x(x-1) 5(x-1) ; x^{-2} = -x^2 ; (x^3)^2 = x^5 ; 5 - (x+y) = 5 - x + y ; \frac{3x+y}{x} = 3 + y$$

$$(a^2)^3 = a^5 ; aa = a^2 ; a^0 = 1 ; \frac{a^5 a}{a^3} = a^2 ; \left(\frac{2}{a}\right)^3 = \frac{a^3}{8} ; a^2 a^3 = a^6 ; (x^2)^3 = x^6 ; \frac{x}{x+y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{x^7 x}{x^5 x} = x^2 ; \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b} ; \left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{x^3}{27} ; \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = x^2 ; \frac{5+10x}{5} = 10x ; 4+8z = 4(1+2z)$$

- La suma de un número y su inverso es $\frac{10}{3}$. Halla dicho número.

-
- Si una fracción de denominador 2 se suma con su inversa se obtiene $\frac{13}{6}$, ¿cuál es la fracción?
 - El numerador de una fracción es 3. Si se suman 4 unidades al denominador, el valor de la fracción disminuye en 1. ¿Cuál es el denominador original?
 - Hallar una fracción cuyo denominador exceda en dos unidades al numerador sabiendo que dicha fracción excede en $\frac{1}{10}$ a la que se obtiene disminuyendo en una unidad cada uno de los términos de la fracción buscada.
 - Si a un número se le agrega el recíproco de 3 resulta el recíproco del número aumentado en 3, ¿cuál es el número?
 - Un grifo es capaz de llenar un depósito en 10 horas y otro lo hace en 8 horas. ¿Qué fracción de depósito se llenará si ambos están abiertos 2 horas? ¿Cuánto tardan en llenarlo entre ambos?
 - Un grifo llena una bañera en 12 min y otro en $\frac{1}{4}$ de hora. ¿Cuánto tardan en llenarlo los dos juntos?
 - Dos grifos manando juntos llenan un depósito en 16 horas. Si uno de ellos, manando en solitario, lo llena en 48 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenará el otro en las mismas condiciones?
 - De los tres caños que fluyen a un estanque, uno lo llena en 36 horas, otro en 30 horas y el tercero en 20 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarlo actuando juntos.
 - Para llenar de agua una piscina hay tres surtidores. El primer surtidor tarda 30 horas en llenarla, el segundo tarda 40 horas y el tercero tarda 5 días. Si los tres surtidores se conectan juntos, ¿cuánto tiempo tardará la piscina en llenarse?
 - Betty tiene un depósito de 30000 litros, que tiene 3 grifos para llenarla. Si se usa sólo el grifo A, el depósito se llena en 20 horas. Si se usa solo el grifo B, en 30 horas y si se usa solo el C, en 60 horas. Si se abren los 3 grifos a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito?
 - A un estanque vacío llegan tres tuberías, procedentes de tres galerías de agua, y cada una tiene una llave en su extremo. Si abrimos sólo la primera, el depósito se llena en 15 minutos. Si abrimos sólo la segunda, éste se llena en 30 minutos. Y, finalmente, si abrimos sólo la tercera, el depósito se llena en 45 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenaría si abriésemos las tres llaves a la vez?
 - En un estanque hay dos grifos y un desagüe por el que se pierde agua. Uno de los grifos tardaría dos horas y media en llenar el estanque, y el otro 10 horas. Por otro lado, el desagüe tardaría 6 horas en vaciar el estanque. ¿Cuánto tardará en llenarse si están abiertos los dos grifos y el desagüe?
 - De un grifo salen 120 l/min y de otro 90 l/min. ¿Cuánto tardarán los dos grifos abiertos en llenar una piscina de $2,1 \cdot 10^5$ l?
 - Un grifo que vierte 250 l/min ha llenado una piscina en 9 h 36 min. El desagüe lo vacía a razón de 720 l/min. Si la piscina está llena, ¿cuánto tardará en vaciarse?
 - Dos grifos han llenado un depósito de 31 m^3 corriendo el uno 7 horas y el otro 2 horas. Después llenan otro depósito 27 m^3 corriendo el uno 4 horas y el otro 3 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada grifo?
 - Un tanque se llena en 6 h si se utiliza un grifo de los dos que tiene conectados. Si se utiliza sólo el otro grifo se llena en 3 h ¿En cuánto tiempo se llenará utilizando los dos simultáneamente?

-
- De los 3 caños que afluyen a un estanque, uno puede llenarlo solo en 37 horas; otro, en 30 horas, y el tercero, en 20 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarlo juntos.
- Un depósito tiene dos grifos. Abriendo solamente el 1º, el depósito se llena en 3 horas; abriendo los dos a la vez, se llena en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abre sólo el 2º grifo?
- Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en agotar un pozo 15 horas. Si actuara sólo la menor, tardaría en agotarlo 16 horas más que si actuara sólo la mayor. ¿Cuánto tardaría ésta en solitario?
- Un estanque de 30 hectolitros (hl) tiene un escape y se necesitan 40 horas para llenarlo con un arroyo que tiene un caudal de 1,25 hl/h. ¿Cuál es el caudal del escape?
- Un depósito tiene tres tubos de abastecimiento: El primero lo llena en 6 horas; el segundo en 10 horas y los tres juntos en 3 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenará el tercer tubo?
- Dos grifos, abiertos simultáneamente, llenan un depósito en 2 horas y 24 minutos. Abiertos por separado, el primero lo llena en 2 horas menos que el segundo. ¿Cuál es el tiempo que tardará cada uno de ellos en llenarlo?
- Un agricultor dispone de dos pozos para llenar un pilón de riego de 90 000 litros. El primer pozo tiene una bomba extractora que aporta un caudal de 15 litros por segundo. El segundo pozo tiene también su propia bomba, capaz de llenar el pilón en una hora y cuarto. Cuando el agricultor riega, abre una compuerta que evacua del pilón 40 litros por segundo. Con esos datos, calcula:
- a) El tiempo que tarda la bomba del primer pozo en llenar el pilón.
 - b) El caudal que aporta la segunda bomba.
 - c) El tiempo que puede regar el agricultor, ininterrumpidamente, si empieza con el pilón lleno y conecta simultáneamente ambas bombas.
- Una vivienda se abastece de agua desde un depósito colocado en la azotea, que tiene una capacidad de 1350 litros. El depósito dispone de una entrada de agua que aporta un caudal de medio litro por segundo, y se abre automáticamente cada vez que el nivel baja. La tubería de distribución evacua del depósito un máximo de tres cuartos de litro por segundo.
- a) ¿Cuánto tardaría en llenarse el depósito en caso de que, por una avería, se hubiera vaciado?
 - b) ¿Cuánto tardaría en vaciarse, en un momento de máxima demanda, si se estropeara la válvula de entrada de agua?
 - c) ¿Cuánto duraría el abastecimiento si todo funcionara correctamente y la demanda máxima se mantuviera de forma prolongada?
- Dos obreros realizan un cierto trabajo en 3 horas. Sabiendo que uno de ellos lo haría en 4 horas, halla el tiempo que tardaría el otro en terminar ese mismo trabajo.
- Un contratista estimó que uno de sus dos albañiles tardaría 9 horas en construir determinado muro y el otro 10 horas. Sin embargo, sabía, por experiencia, que cuando ambos trabajaban juntos colocaban 10 sillares de piedra por hora menos que la suma de los que hubieran colocado entre los dos trabajando cada uno por su cuenta. Como tenía prisa, los colocó juntos a hacer el trabajo, y se dio cuenta de que tardaban exactamente 5 horas en construir el muro. ¿Cuál era el número de sillares de piedra que había en el muro?

-
- Un albañil y su ayudante tardan 4 horas en poner el suelo de un cuarto de baño. El albañil, más experto en este tipo de trabajos, afirma que él sólo haría el trabajo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo haría su ayudante?
 - Trabajando juntos dos obreros hacen un trabajo en 17 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?
 - Santiago Loso es capaz de comerse una tarta en 6 minutos. Carmelo Cotón es capaz de hacerlo en 9 minutos, y Evaristo "Kentavisto" lo hace lo hace en 15 minutos... Mira tu que "grassía" tiene la "cossa". ¿Cuánto crees que tardarán en comérsela los tres juntos?
 - Un obrero cualificado puede hacer un trabajo en 4 días y su joven aprendiz, el mismo trabajo, en 8 días:
a) ¿Qué parte de este trabajo hace cada uno de ellos en un día? b) Si los dos trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en hacer dicho trabajo?
 - Un pintor A tarda 4 horas en pintar un muro y otro pintor B tarda 6 horas en pintar el mismo muro. ¿Cuánto tardarán los dos pintores trabajando juntos para pintar el mismo muro?
 - Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 monedas diarias menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero sólo 24. Si el primero ha ganado 33000 monedas más que el segundo calcula el salario diario de cada obrero.
 - Una persona puede pintar una muralla en 5 horas, otra lo hace en 6 horas y una tercera persona tarda 12 horas en pintar la misma muralla. ¿Cuánto tardarían si la pintaran entre las tres?
 - En un trabajo actúan tres mecanógrafas y lo terminan en cuatro días. Si trabajase solamente la primera, lo terminaría en 12 días; si trabajase solamente la segunda, lo terminaría en 10 días. ¿En cuánto tiempo lo terminaría la tercera actuando sola?
 - Un obrero ha empleado 25 días en la realización de un trabajo. Si hubiera trabajado 2 horas más al día, habría terminado en 20 días. ¿Durante cuántas horas trabajó diariamente?
 - Tres obreros hacen un trabajo en 4 días. Sabiendo que el primero haría ese trabajo en 9 días y el segundo en 12 días, ¿cuánto tiempo tardaría en hacerlo el tercero?
 - Tres obreros se encargan de cavar una zanja. El primero podría realizar el trabajo sólo en 10 días. El segundo en 8 días y el tercero en 6 días. Si se pusieran a trabajar los tres juntos ¿en cuántos días lo realizarían?
 - El matrimonio Pinto y su hijo Pepito están apurados porque acaba de llamar su amigo Fermín a quien llevan mucho tiempo sin ver, para decirles que llegará a las cinco en punto. Son las tres de la tarde y el jardín parece una selva. Pepe Pinto es capaz de cortar el césped en tres horas, la señora Pinto tardaría cuatro horas y Pepito lo haría en seis horas. Si los tres deciden trabajar al mismo tiempo, ¿crees que habrán terminado de cortar el césped cuando llegue su amigo? ¿A qué hora terminarán?
 - El entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para lavar un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuántos minutos tardarán el entrenador y su hijo en lavar 3 elefantes trabajando juntos?
 - Un labrador tiene pienso para alimentar a una vaca durante 27 días y, si fuera una oveja, durante 54 días. ¿Para cuánto tiempo tendría comida si necesitara tener a la vaca y a la oveja comiendo juntas?

-
- (El problema de Newton) En un campo la hierba crece en todas partes con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días y 30 vacas en 60 días. ¿Cuántas vacas serían necesarias para comerse toda la hierba en 96 días?

 - Una excursión a pie para atravesar un cierto paraje pirenaico requiere marchar durante seis jornadas seguidas. Sin embargo, una persona sólo puede transportar comida para cuatro días. ¿Cuántas jornadas ha de invertir para hacer la excursión en solitario?
(Se supone que el arriesgado aventurero puede hacer algunas expediciones cortas para depositar comida en puntos intermedios del recorrido).

 - Santiago López es capaz de comerse una tarta en 6 minutos, Carmelo Cotón es capaz de hacerlo en 9 minutos y Evaristo Ketanvisto lo hace en 15 minutos. ¿Cuánto tardarán en comerse una tarta los tres juntos?

 - Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?